填充第 7 題第 2 小題

$$\begin{vmatrix} x^9 & x^8 & x^7 & \cdots & x^2 & x & 1 \\ 1 & x^9 & x^8 & \cdots & x^3 & x^2 & x \\ x & 1 & x^9 & \cdots & x^4 & x^3 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^6 & x^5 & x^4 & \cdots & x^9 & x^8 & x^7 \\ x^7 & x^6 & x^5 & \cdots & 1 & x^9 & x^8 \\ x^8 & x^7 & x^6 & \cdots & x & 1 & x^9 \end{vmatrix}$$

（沿第一列展開如下）

$$= x^9\begin{vmatrix} x^9 & x^8 & \cdots & x^3 & x^2 & x \\ 1 & x^9 & \cdots & x^4 & x^3 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^5 & x^4 & \cdots & x^9 & x^8 & x^7 \\ x^6 & x^5 & \cdots & 1 & x^9 & x^8 \\ x^7 & x^6 & \cdots & x & 1 & x^9 \end{vmatrix} - x^8\begin{vmatrix} 1 & x^8 & \cdots & x^3 & x^2 & x \\ x & x^9 & \cdots & x^4 & x^3 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^6 & x^4 & \cdots & x^9 & x^8 & x^7 \\ x^7 & x^5 & \cdots & 1 & x^9 & x^8 \\ x^8 & x^6 & \cdots & x & 1 & x^9 \end{vmatrix} + x^7\begin{vmatrix} 1 & x^9 & \cdots & x^3 & x^2 & x \\ x & 1 & \cdots & x^4 & x^3 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^6 & x^5 & \cdots & x^9 & x^8 & x^7 \\ x^7 & x^6 & \cdots & 1 & x^9 & x^8 \\ x^8 & x^7 & \cdots & x & 1 & x^9 \end{vmatrix} - \cdots - 1\bullet\begin{vmatrix} 1 & x^9 & \cdots & x^4 & x^3 & x^2 \\ x & 1 & \cdots & x^5 & x^4 & x^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^6 & x^5 & \cdots & 1 & x^9 & x^8 \\ x^7 & x^6 & \cdots & x & 1 & x^9 \\ x^8 & x^7 & \cdots & x^2 & x & 1 \end{vmatrix}$$

（除了頭尾的兩個行列式，中間都可以找到兩行成比例，因此化簡如下）

$$= x^9\begin{vmatrix} x^9 & x^8 & \cdots & x^3 & x^2 & x \\ 1 & x^9 & \cdots & x^4 & x^3 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^5 & x^4 & \cdots & x^9 & x^8 & x^7 \\ x^6 & x^5 & \cdots & 1 & x^9 & x^8 \\ x^7 & x^6 & \cdots & x & 1 & x^9 \end{vmatrix} - x^8\times 0 + x^7\times 0 - \cdots - 1\bullet\begin{vmatrix} 1 & x^9 & \cdots & x^4 & x^3 & x^2 \\ x & 1 & \cdots & x^5 & x^4 & x^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^6 & x^5 & \cdots & 1 & x^9 & x^8 \\ x^7 & x^6 & \cdots & x & 1 & x^9 \\ x^8 & x^7 & \cdots & x^2 & x & 1 \end{vmatrix}$$

（把第一個行列式的第一列提出 x，得下式）

$$=x^{10}\begin{vmatrix} x^8 & x^7 & \cdots & x^2 & x & 1 \\ 1 & x^9 & \cdots & x^4 & x^3 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^5 & x^4 & \cdots & x^9 & x^8 & x^7 \\ x^6 & x^5 & \cdots & 1 & x^9 & x^8 \\ x^7 & x^6 & \cdots & x & 1 & x^9 \end{vmatrix} - x^8\times 0 + x^7\times 0 - \cdots - 1\bullet\begin{vmatrix} 1 & x^9 & \cdots & x^4 & x^3 & x^2 \\ x & 1 & \cdots & x^5 & x^4 & x^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^6 & x^5 & \cdots & 1 & x^9 & x^8 \\ x^7 & x^6 & \cdots & x & 1 & x^9 \\ x^8 & x^7 & \cdots & x^2 & x & 1 \end{vmatrix}$$

（後面的行列式值其實等於前面的行列式值，因為每兩列交換移動 8 次後，就可以讓第一列移到最後一列）

$$=x^{10}\begin{vmatrix} x^8 & x^7 & \cdots & x^2 & x & 1 \\ 1 & x^9 & \cdots & x^4 & x^3 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^5 & x^4 & \cdots & x^9 & x^8 & x^7 \\ x^6 & x^5 & \cdots & 1 & x^9 & x^8 \\ x^7 & x^6 & \cdots & x & 1 & x^9 \end{vmatrix} - 1\bullet\begin{vmatrix} x^8 & x^7 & \cdots & x^2 & x & 1 \\ 1 & x^9 & \cdots & x^4 & x^3 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^5 & x^4 & \cdots & x^9 & x^8 & x^7 \\ x^6 & x^5 & \cdots & 1 & x^9 & x^8 \\ x^7 & x^6 & \cdots & x & 1 & x^9 \end{vmatrix}$$

$$=\left(x^{10}-1\right)\begin{vmatrix} x^8 & x^7 & \cdots & x^2 & x & 1 \\ 1 & x^9 & \cdots & x^4 & x^3 & x^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^5 & x^4 & \cdots & x^9 & x^8 & x^7 \\ x^6 & x^5 & \cdots & 1 & x^9 & x^8 \\ x^7 & x^6 & \cdots & x & 1 & x^9 \end{vmatrix}$$

（沿第一列展開如下）

$$=\left(x^{10}-1\right)\left\{x^8\begin{vmatrix} x^9 & \cdots & x^4 & x^3 & x^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^4 & \cdots & x^9 & x^8 & x^7 \\ x^5 & \cdots & 1 & x^9 & x^8 \\ x^6 & \cdots & x & 1 & x^9 \end{vmatrix} - x^7\times 0 + x^6\times 0 - \cdots + 1\times\begin{vmatrix} 1 & \cdots & x^5 & x^4 & x^3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^5 & \cdots & 1 & x^9 & x^8 \\ x^6 & \cdots & x & 1 & x^9 \\ x^7 & \cdots & x^2 & x & 1 \end{vmatrix}\right\}$$

（把第一個行列式的第一列提出 x^2 ，得下式）

$$=\left(x^{10}-1\right)\left\{x^{10}\begin{vmatrix} x^7 & \cdots & x^2 & x & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^4 & \cdots & x^9 & x^8 & x^7 \\ x^5 & \cdots & 1 & x^9 & x^8 \\ x^6 & \cdots & x & 1 & x^9 \end{vmatrix}-x^7\times 0+x^6\times 0-\cdots+1\times\begin{vmatrix} 1 & \cdots & x^5 & x^4 & x^3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^5 & \cdots & 1 & x^9 & x^8 \\ x^6 & \cdots & x & 1 & x^9 \\ x^7 & \cdots & x^2 & x & 1 \end{vmatrix}\right\}$$

（後面的行列式值與前面的行列式值恰好異號，因為每兩列交換要移動７次，才能讓第一列移到最後一列）

$$=\left(x^{10}-1\right)\left\{x^{10}\begin{vmatrix} x^7 & \cdots & x^2 & x & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^4 & \cdots & x^9 & x^8 & x^7 \\ x^5 & \cdots & 1 & x^9 & x^8 \\ x^6 & \cdots & x & 1 & x^9 \end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix} x^7 & \cdots & x^2 & x & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^4 & \cdots & x^9 & x^8 & x^7 \\ x^5 & \cdots & 1 & x^9 & x^8 \\ x^6 & \cdots & x & 1 & x^9 \end{vmatrix}\right\}$$

$$=\left(x^{10}-1\right)^2\begin{vmatrix} x^7 & \cdots & x^2 & x & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^4 & \cdots & x^9 & x^8 & x^7 \\ x^5 & \cdots & 1 & x^9 & x^8 \\ x^6 & \cdots & x & 1 & x^9 \end{vmatrix}$$

（繼續每次都沿第一行展開，直到最後～可得如下）

$$=\cdots=\left(x^{10}-1\right)^9$$

因為 $x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ \Rightarrow x^{10}=\cos 600^\circ+i\sin 600^\circ=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow x^{10}-1=-\left(\dfrac{3+\sqrt{3}i}{2}\right)=-\sqrt{3}\left(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ\right)$

$$\left(x^{10}-1\right)^9=\left(-\sqrt{3}\right)^9\times\left(\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ\right)=\left(-81\sqrt{3}\right)\left(-i\right)=81\sqrt{3}\ i$$