

1. 自 1, 2, 3, 4, 5 等五類數字中，選取 5 個數字相乘，數字准許重複取其乘積為 10 的倍數者共有幾種 55

2. 求 $C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 + \dots + C_3^{31} = \underline{19160}$ $\frac{x+x^2-(n+1)x^{n+1}+(2n^2+2n-1)x^{n+2}-n^2x^{n+3}}{(1-x)^3}$

3. 設 $x \neq 1$ ，求 $x+2^2x^2+3^2x^3+\dots+n^2x^n = \underline{\frac{x(1-x)^{-2}}{(1-x)^3}}$

4. 求 $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx = \underline{\frac{116}{15}}$

5. 設 a, b, c 為三相異實數，解方程組 $\begin{cases} x+y+z=a+b+c \\ bx+cy+az=a^2+b^2+c^2 \\ cx+ay+bz=a^2+b^2+c^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=b+c-a \\ y=c+a-b \\ z=a+b-c \end{cases}$

6. 若方程式 $16(x+2)^4 - 40(x+2)^3 + 12(x+2)^2 + 20(x+2) - 6 = a(2x+1)^4 + b(2x+1)^3 + c(2x+1)^2 + d(2x+1) + e$ ，其中 a, b, c, d, e 為實數，求 $a+b+c+d+e = \underline{18}$

7. 在 xy 平面上，設與 $A(5, -12)$ 之距離為 6，與 $O(0, 0)$ 之距離為 7 之直線斜率分別為 m_1, m_2, \dots, m_n ，

則 $\sum_{i=1}^n m_i = \underline{-\frac{55}{12}}$

8. 若實係數方程式 $x^3 + 3x^2 - 24x + a = 0$ 有相異二正根與一負根，求 a 之範圍 $\underline{0 < a < 28}$

9. 在 $\triangle ABC$ 中，試求 $\frac{\sqrt{\tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{\sqrt{\tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2}}}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{\sqrt{\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}}}{\cos \frac{C}{2}}$ 的最大值為 2

10. 兩複數 z_1, z_2 在複數平面上對應的點分別 P_1, P_2 ， O 為原點且 $\frac{z_1-a}{z_1+a}$ 為純虛數 (a 為非零實數)，

$3z_1^2 - 2z_1z_2 + 2z_2^2 = 0$ ，試以 a 表示三角形 $\triangle OP_1P_2$ 的面積 $\underline{\frac{\sqrt{5}}{4}a^2}$

11. $Arg(z)$ 表示一複數 z 的主幅角，若 $Arg(z^2 - 3) = \frac{5\pi}{6}$ ， $Arg(z^2 + 3) = \frac{\pi}{3}$ ，求 $Arg(z) = \underline{60^\circ \text{ 或 } 240^\circ}$ (全對才給分)

12. 在空間中，已知兩球面 $S_1: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ， $S_2: (x-2)^2 + (y+5)^2 + (z-3)^2 = 9$ 皆與平面 E 相切且位於 E 的同側，又 $P(-1, 4, 0)$ 在平面 E 上，求 E 之平面方程式 $\underline{x+1=0}$ 或 $\underline{7x+4y-4z=9}$ (全對才給分)

13. P 為 $\triangle ABC$ 內部一點，且 $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = 15^\circ$ ，求 $\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} = \underline{8+4\sqrt{3}}$

14. 若不等式 $\log_a \frac{3x^2+ax+1}{x^2+x+1} < \log_a 4$ 對任意實數 x 恆成立，求實數 a 範圍 $\underline{1 < a < 2\sqrt{3}}$

15. 設集合 $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ，集合 $T = \{A \text{ 為二階方陣 } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ 其中 } a, b, c, d \in S \text{ 且 } A \text{ 無乘法反矩陣}\}$ ，求

集合 T 之元素個數 113

16. 設 $f(x)$ 為一實係數多項式， $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ，其中 $a \in R$ ，若 $F(x+1) - F(x) = -6x^2 - 4x + 4$

則 $F'(2) = \underline{-15}$

17. 設 $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{2x + \sqrt{3x}}}$ ，則 $f'(3) = \underline{\frac{17\sqrt{6}}{144}}$

18. 一實係數多項式 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，已知 $f(1) = 4, f(2) = 8, f(3) = 12$ ，求 $f(5) + f(-1) = \underline{160}$

20. 設一皆為正數的等比數列 $\{a_n\}$ 的首項 $a_1 = \frac{1}{2}$ ，前 n 項和為 S_n ，且 $2^{10}S_{30} - (2^{10} + 1)S_{20} + S_{10} = 0$ 。

求 $\{nS_n\}$ 的前 n 項和 $T_n = \underline{\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} - 2}$

21. 投擲 4 顆相異的公正骰子，為使至少一次“恰兩顆點數相同”的機率不小於九成，最少應投擲幾次 3

22. 投擲四顆相異的公正骰子一次，求點數和不超過 16 的機率 $\underline{\frac{493}{648}}$