

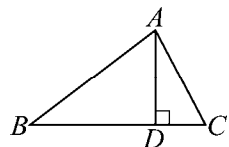
臺北市立松山家商101學年度第2次教師甄選初試

數學科 試題卷

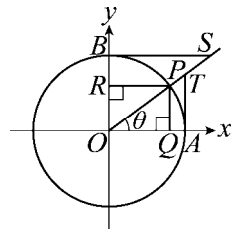
一、填充題 (每格 5 分 共 70 分)：

1. 已知一圓 C_1 的半徑為 10，作圓 C_1 的內接正方形 s_1 ，再作正方形 s_1 的內切圓 C_2 ，再作圓 C_2 的內接正方形 s_2 ，如此繼續...，可得一無窮圓列 $C_1, C_2, C_3, C_4, \dots$ ，則其面積總和為 200π 。

2. 如圖 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ，已知 $\overline{AB} = 25$ ， $\sin B = \frac{3}{5}$ ， $\sin C = \frac{15}{17}$ ，求 (B)。(本題不計分)

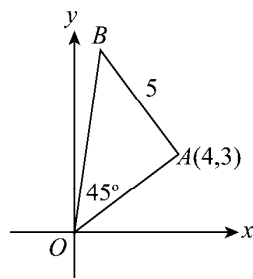


3. 下圖為單位圓， \overline{AT} ， \overline{BS} 均與圓相切， \overline{PQ} 垂直 x 軸， \overline{PR} 垂直 y 軸， $\angle AOP = \theta$ ，若 $\overline{BS} = \frac{4}{3}$ ，求矩形 $OQPR$ 的周長為 $\frac{14}{5}$ 。

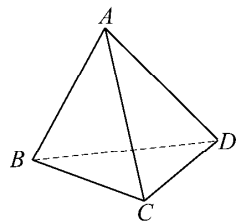


4. 一飛機以一定之速度向東南方向航行，在正午時見玉山在正東方，雪山在東北方，飛行 40 分鐘後見玉山在北 30° 西方向且雪山在正北方，若玉山與雪山之距離為 120 公里，則飛機之航行速度 = $90\sqrt{6}$ 。

5. 如圖坐標平面上，已知 $A(4,3)$ ， $\overline{AB} = 5$ ， $\angle AOB = 45^\circ$ ，求 B 點的坐標為 $(1,7)$ 。



6. 正四面體 $ABCD$ ，一稜長為 10，有一隻螞蟻由點 A ，沿 $\triangle ABC$ ， $\triangle BCD$ ， $\triangle ABD$ ， $\triangle ACD$ 之順序，在側面上移動，終點為 C ，則移動之最短距離為 $10\sqrt{7}$ 。



7. 已知 $A(1,2,3)$ ， $B(-1,1,2)$ ， $C(x,y,0)$ ，求

(1) $\triangle ABC$ 的最小周長為 $\sqrt{6} + \sqrt{30}$ ；(2) 當 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ 為最小時， C 點之坐標為 $(0, \frac{3}{2}, 0)$ 。

8.圓 $C: x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$ ，過 $A(3,1)$ 作 C 的切線，切線方程式為 $3x - 4y = 5$ 或 $x = 3$ 。

9.球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - \frac{35}{6} = 0$ ，與直線 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ 相切，求切點 $\left(\frac{5}{6}, -\frac{4}{3}, \frac{11}{6}\right)$ 。

10.九位學生的數學抽考成績為：30、40、60、50、70、80、60、90、60，若從這九個分數中以簡單隨機抽樣法取三個分數，則所取出三個分數的中位數等於 60 分的機率為 $\frac{23}{42}$ 。

11.設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，(1) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ，(2)若 $AX = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，求 $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 。

12.已知 $x \in \mathbb{R}$ ， $x \neq 0$ ，若 $p = x^3 - x^2 + x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ ，則 p 的值的範圍為 $p \geq 2$ 或 $p \leq -6$ 。

二、計算證明題 (每題 10 分 共 30 分)：

1.設方程式 $6x^2 - xy - y^2 + ax + by + c = 0$ 表交於點 $(1, 2)$ 之二直線，試求：

(1) a 、 b 、 c 之值； (2) 此二直線的夾角。

答：(1) $a = -10$ ， $b = 5$ ， $c = 0$ ； (2) 45° 或 135°

2.設 $f(x) = x^2$ ，令 R 表 x 從 -2 到 2 ，曲線 $y = f(x)$ 與 x 軸所圍的區域，若將區間 $[-2, 2]$ 八等分，試求上和及下和。

答：上和為 $\frac{15}{2}$ ，下和為 $\frac{7}{2}$

3. $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ ，若二函數 $y = \tan x$ 與 $y = \cos x$ 的圖形相交於兩點 (a, b) ， (c, d) ，試證： $a + c = 180^\circ$ 且 $b + d = 0$ 。

答：略