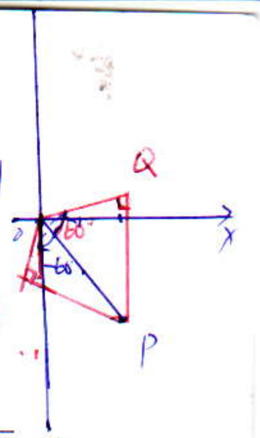
∵ $\overline{OP}:\overline{OQ}=2:1$　$(2-3i)(\cos60^\circ+i\sin60^\circ)\times\frac{1}{2}=\left(\frac{2+3\sqrt{3}}{4}+\frac{2\sqrt{3}-3}{4}i\right)$

$\overrightarrow{OP}=(2,-3)$　$(2-3i)(\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ))\times\frac{1}{2}=\left(\frac{2-3\sqrt{3}}{4}+\frac{-2\sqrt{3}-3}{4}i\right)$ #

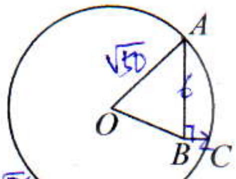


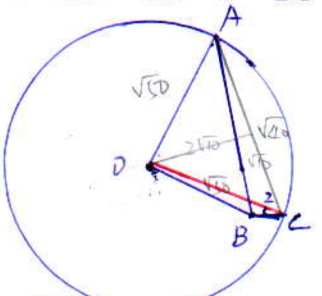
國立基隆女中 101 學年度第一學期第一次教師甄試數學科

一、填充題：(請將答案清楚標示於答案紙上)(每格 7 分)

1. 如下圖，A, C 在以 O 為圓心，半徑為 $\sqrt{50}$ 的圓周上，若 $\angle ABC=90^\circ$，$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=2$，

則 $\overline{OB}=$ $\sqrt{26}$ 。





$\cos\angle 2=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow\sin\angle 2=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos(\angle1+\angle2)=\frac{1}{\sqrt{10}}\Rightarrow\sin(\angle1+\angle2)=\frac{3}{\sqrt{10}}$

∴ $\cos\angle1=\frac{1}{\sqrt{50}}+\frac{6}{\sqrt{50}}=\frac{7}{\sqrt{50}}=\frac{4+50-\overline{OB}^2}{2\times2\times\sqrt{50}}\Rightarrow\overline{OB}=\sqrt{26}$

2. 直線 L 與拋物線 $(x+3)^2=-4(y-1)$ 相交於相異兩點 A, B，已知 $\overline{AB}$ 之中點為 $(-1,-12)$，且

F 為拋物線之焦點，則 $\overline{AF}+\overline{BF}$ 之值為 28 。

3. 設 $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，試求 $A^{20}=$ $\begin{pmatrix}1 & -20\\ 0 & 1\end{pmatrix}$。 $A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow A^{20}=C^{20}_0(-1)^{20}+C^{20}_1\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-20\\0&1\end{pmatrix}$ #

4. $a\in R$，過 $P(a,2)$ 作 $y=f(x)=x^3-3x^2+2$ 的切線，若所作的切線恰有一條，試求 a 的範圍________。

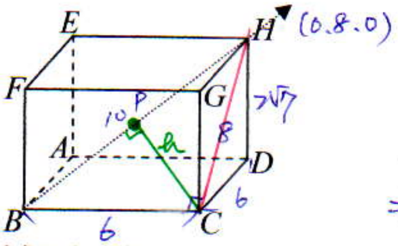
設切點 (t, t^3-3t^2+2)　$\frac{t^3-3t^2}{t-a}=3t^2-6t\Rightarrow t(2t^2-3(a+1)t+6a)=0$ → 恰有一解　$9(a+1)^2-2\times6a\times4<0$　$\frac{1}{3}<a<3$

5. 在坐標平面上，已知直角三角形 OPQ 中，$\angle OQP$ 為直角，$O(0,0), P(2,-3)$，且

$\overline{OP}:\overline{OQ}=2:1$，則 Q 點坐標為 $\left(\frac{2+3\sqrt{3}}{4},\frac{2\sqrt{3}-3}{4}\right)$ 或 $\left(\frac{2-3\sqrt{3}}{4},\frac{-2\sqrt{3}-3}{4}\right)$

6. 若某變換為：將平面上的圖形以 x 軸為基準線作 2 倍的縱向伸縮，再依 y 軸方向作 3 倍推移，再對於直線 $x+y=0$ 作鏡射，再以原點為中心旋轉 270°，則此變換矩陣為________。

7. 如圖，有一長方體 $ABCD-EFGH$，已知 $\overline{AB}=\overline{AD}=6$，$\overline{AE}=2\sqrt{7}$，若將此長方體置於坐標空間中，$B$ 點為原點 $(0,0,0)$，H 點為 y 軸正向上一點，則 C 點在直線 $\overline{BH}$ 上的投影點坐標為 $(0,\frac{18}{5},0)$。



$10\times h=6\times8\Rightarrow h=\frac{24}{5}$

∴ $\overline{BC}:h=6:\frac{24}{5}=1:\frac{4}{5}=5:4$

∴ $\overline{BP}=3\times\frac{6}{5}=\frac{18}{5}$

$\Rightarrow P(0,\frac{18}{5},0)$

8. 給定一個邊長為 2 的正八面體，某個平面與此正八面體一雙平行表面平行，且將此正八面體分成兩個全等的立體。設這個平面截此正八面體所形成多邊形的截面面積為 $\frac{a\sqrt{b}}{c}$，其中 a, b, c 均為正整數，a 與 c 互質，b 不能被任何質數的平方整除，則 $a+b+c=$ 8 。

$p=-\frac{1}{3}x+10 \Rightarrow x=30-3p$

$q=\frac{1}{6}y-1 \Rightarrow y=6q+6$

代入 $y=30+\frac{3}{5}x \Rightarrow 6q+6=30+\frac{3}{5}(30-3p)$

$6q+6=48-\frac{9}{5}p \Rightarrow 6q=42-\frac{9}{5}p \Rightarrow q=7-\frac{3}{10}p$

$\therefore (a,b)=(7,-\frac{3}{10})$

9. 設兩組資料 x、y。若 y 對 x 的迴歸直線為 $y=30+\frac{3}{5}x$，且 x 的平均數為 60。另兩組資料 p、q，且 $p=-\frac{1}{3}x+10$、$q=\frac{1}{6}y-1$，若 q 對 p 的迴歸直線為 $q=a+bp$，則 $(a,b)=$ $(7,-\frac{3}{10})$ #

10. 連續擲一公正骰子 30 次，請問 6 點出現 5 次的機率最大。 $30\times\frac{1}{6}=5$ (期望值)

11. 一袋中有紅球、白球共 10 個，則紅球恰有 5 個時由袋中取出兩球皆為同色的機率最小。 設紅球 n 個 $C^n_2=C^{10-n}_2 \Rightarrow n^2-n=n^2-19n+90 \Rightarrow 18n=90 \Rightarrow n=5$ #

12. 設 $f(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$ 若 $f(m)=\frac{1}{3}$，$f(n)=\frac{1}{2}$，試求 $f(m+n)=$ $\frac{5}{7}$。

$f(x)=\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=t \Rightarrow 2^{2x}=\frac{1+t}{1-t}$ $\therefore \begin{cases}2^{2m}=2\\2^{2n}=3\end{cases}$ $f(m+n)=\frac{2^{2(m+n)}-1}{2^{2(m+n)}+1}=\frac{6-1}{6+1}=\frac{5}{7}$ #

13. 設數列 $\langle a_n\rangle,\langle b_n\rangle$ 滿足 $a_0+b_0=2$，且對每一正整數 n，恆有 $a_n=\sqrt{3}a_{n-1}-b_{n-1}$ 及 $b_n=a_{n-1}+\sqrt{3}b_{n-1}$，則 $a_{18}+b_{18}=$ -2^{19}。

$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-1\\1&\sqrt{3}\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}a_0\\b_0\end{pmatrix}$ 設 $2A=\begin{pmatrix}\cos30^\circ&-\sin30^\circ\\\sin30^\circ&\cos30^\circ\end{pmatrix}$

$(2A)^n=\begin{pmatrix}\cos30^\circ n&-\sin30^\circ n\\\sin30^\circ n&\cos30^\circ n\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}a_{18}\\b_{18}\end{pmatrix}=2^{18}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\b_0\end{pmatrix}=2^{18}(-a_0-b_0)$

$=-2^{19}$ #

二、計算題：

1. 設 n 為自然數，試利用數學歸納法證明：n^4+n^2+2n 必為某自然數的倍數。
(1)此數最大為 4 (2 分) (2)利用數學歸納法證明(1)的答案 (7 分)

sol> $n=1$，$1+1+2=4\times1$ —— ①

$n=2$ $2^4+2^2+2^2=2^2(2^2+2)=4\times6$

$\therefore$ 推測 n^4+n^2+2n 為 4 的倍數 又 $n^4+n^2+2n=n(n+1)(n^2-n+2)$

設 $n=k$ 原関係成立，即 $k(k+1)(k^2-k+2)=4p$

則 $n=k+1$ 時

$(k+1)^4+(k+1)^2+2(k+1)=(k+1)[(k+1)^3+(k+1)+2]=(k+1)(k+2)[(k+1)^2-(k+1)+2]$

$=(k+1)(k+2)[k^2+2k+1-k-1+2]=(k+1)(k+2)[k^2+k+2]$

$=(k+1)(k+2)[(k^2-k+2)+2k]=(k+1)k[(k^2-k+2)+2k]+2(k+1)[k^2+k+2]$

$=4p+2k^2(k+1)+2(k+1)[k^2+2k+2]=4p+2(k+1)[k^2+k^2+2k+2]$

$=4[p+(k+1)(k^2+k+1)]$ 為 4 的倍數 $\therefore \forall n\in N$，由數歸 n^4+n^2+2n 恆為 4 的倍數

數學科答案：

一、填充題：(每格 7 分)

1. $\sqrt{26}$ 2. 28 3. $\begin{bmatrix}1&-20\\0&1\end{bmatrix}$ 4. $\frac{1}{3}<a<3$ 5. $\left(\frac{2+3\sqrt{3}}{4},\frac{-3+2\sqrt{3}}{4}\right)$ or $\left(\frac{2-3\sqrt{3}}{4},\frac{-3-2\sqrt{3}}{4}\right)$

6. $\begin{bmatrix}-1&0\\3&2\end{bmatrix}$ 7. $\left(0,\frac{18}{5},0\right)$ 8. 8 9. $\left(7,-\frac{3}{10}\right)$ 10. 5 次 11. 5 12. $\frac{5}{7}$ 13. -2^{19}

二、計算題：

1.(1) 4(2 分)

(2)略(7 分)