臺北市立建國高級中學　101 學年度　第 2 次教師甄選　數學科試題

一、填充題(每題 7 分，8 題共 56 分)

<u>※請將答案填入答案欄中，否則不予計分</u>

1.球 S_1 外接於四面體 $ABCD$，另一個半徑為 1 的球面 S_2 與平面 ABC 相切，並且 S_1、S_2 內切於 D 點,已知 $\overline{AD}=3$，$\cos\angle BAC=\dfrac{4}{5}$，$\angle BAD=\angle CAD=45°$，試問四面體 $ABCD$ 的體積為____________.

2.已知拋物線的頂點在原點，焦點在 x 軸上，ΔABC 三個頂點都在拋物線上，且 ΔABC 的重心為拋物線的焦點 F，若 $\overline{BC}$ 邊所在的直線為 $4x+y-20=0$，試求拋物線的方程式為__________.

3.若 x 的 101 次方程式 $x^{101}-202x^{100}+a_{99}x^{99}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 有 101 個正實根，對於所有可能的方程式，試求 $\sum\limits_{k=0}^{99}|a_k|$ 的最大值為_______.

4.在 1,2,…,96 的直線排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_{96})$ 中，滿足條件（＊）的排列共有__________個？

（＊）：恰有一個 $i\in\{1,2,\cdots,95\}$，使得 $\begin{cases} a_1<a_2<\cdots<a_i \\ a_i>a_{i+1} \\ a_{i+1}<a_{i+2}<\cdots<a_{96} \end{cases}$ 成立。

5.設函數 $f(x)=-x^3+3x+2$ 分別在 x_1 、 x_2 處取得極小值、極大值。在 xy 平面上點 A、B 的座標分別爲 $(x_1,f(x_1))$、$(x_2,f(x_2))$，該平面上動點 P 滿足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=4$，點 Q 是點 P 關於直線 $y=2(x-4)$ 的對稱點，求動點 Q 的軌跡方程爲__________.

6.已知複數 $a=\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}i$ ，若 $z_n=1024\,a^n$ ，其中 n 爲正整數，則絕對值 $|z_9-z_{11}|=$________.

7. 已知 $\begin{cases}\tan\alpha+\log_3(3\tan\alpha+6)=2\\ \tan\beta+3^{\tan\beta-1}=4\end{cases}$ ，求 $\tan\alpha+\tan\beta=$__________.

8.將 268 個數放在一個圓周上，任意連續的 20 個數字之和都等於 75，且放在第 17 號位置的數爲 3，第 83 號位置的數爲 4，第 144 號位置的數爲 9，則第 210 號位置的數爲_____.

答案欄：

1.	2.	3.	4.
5.	6.	7.	8.

二、計算證明題(3 題 共 44 分)

1.已知銳角ΔABC的外接圓半徑為R，且 $\overline{AB}=c=1$，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\angle BAC=\theta$，則：

(1) 證明「正弦定理」：$\dfrac{a}{\sin\theta}=2R$。 (6 分)

(2) 若 $b\le\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$，證明：以$A$、$B$、$C$為圓心，1 為半徑的 3 個圓能覆蓋$\Delta ABC$. (8 分)

2. 已知四面體 $ABCD$，H_a, H_b, H_c, H_d 分別是 ΔBCD，ΔACD，ΔABD，ΔABC 的垂心，試問：$\overleftrightarrow{AH_a}$，$\overleftrightarrow{BH_b}$、$\overleftrightarrow{CH_c}$，$\overleftrightarrow{DH_d}$ 四直線相交於一點的充分必要條件是什麼？並證明之。(15 分)

3.已知正數 a,b,c 滿足：$5c-3a \le b \le 4c-a$ ，$c\ln b \ge a+c\ln c$，求$\dfrac{b}{a}$的範圍。(15 分)