

# 論斐波納契恆等式

陳敏皓

國立蘭陽女中數學教師

## 壹、前言

首先歷史溯源。德國偉大數學家萊布尼茲 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716) 在年輕時，曾發現一個有趣的結果：

令  $\operatorname{Re}(z)$  表示複數  $z$  的實部， $\operatorname{Im}(z)$  表示複數  $z$  虛部，若  $u, v$  為複數，則

$$|u|^2 \cdot |v|^2 = [\operatorname{Re}(u) \cdot \operatorname{Re}(v) + \operatorname{Im}(u) \cdot \operatorname{Im}(v)]^2 + [\operatorname{Im}(u) \cdot \operatorname{Re}(v) - \operatorname{Re}(u) \cdot \operatorname{Im}(v)]^2。$$

若轉換成數論想法：

若  $a, b$  為自然數，且  $(17^2 + 19^2) \cdot (13^2 + 15^2) = a^2 + b^2$ 。給定  $a \geq b$ ，求數對  $(a, b) = ?$

透過對歷史事實的了解，這個問題看似困難，實際上是不折不扣的「考古題」，在中世紀《平方數之書》(*The Book of Squares*)一書中，斐波納契 (Leonardo Pisano Fibonacci, 1170-1250) (圖二) 很明確提出在丟番圖 (Diophantus of Alexandria, 約西元前 246-330) 的《數論》(*Arithmetica*) 第三卷的第十九問題中，寫道：

$$65 = (13)(5) = (3^2 + 2^2)(2^2 + 1^2) = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2。$$

印度數學家婆羅門峇多 (Brahmagupta, 598-668) 最早發現兩個平方和的恆等式  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ ，而其著作翻成阿拉伯文後，再翻成拉丁文。之後，這個恆等式在阿拉伯世界廣泛被運用，例如：阿爾·卡西 (al-Khazin, 約 900-971) 在大約 950 年明確使用這個恆等式，其後斐波納契在《平方數之書》有更深入且專精的算術研究，因此，丟番圖平方和恆等式又常被稱為斐波納契恆等式、兩個平方和恆等式 (Two square identity)、婆羅門峇多恆等式 (Brahmagupta's identity)、波羅門及多和費伯納西恆等式 (Brahmagupta-Fibonacci identity)。



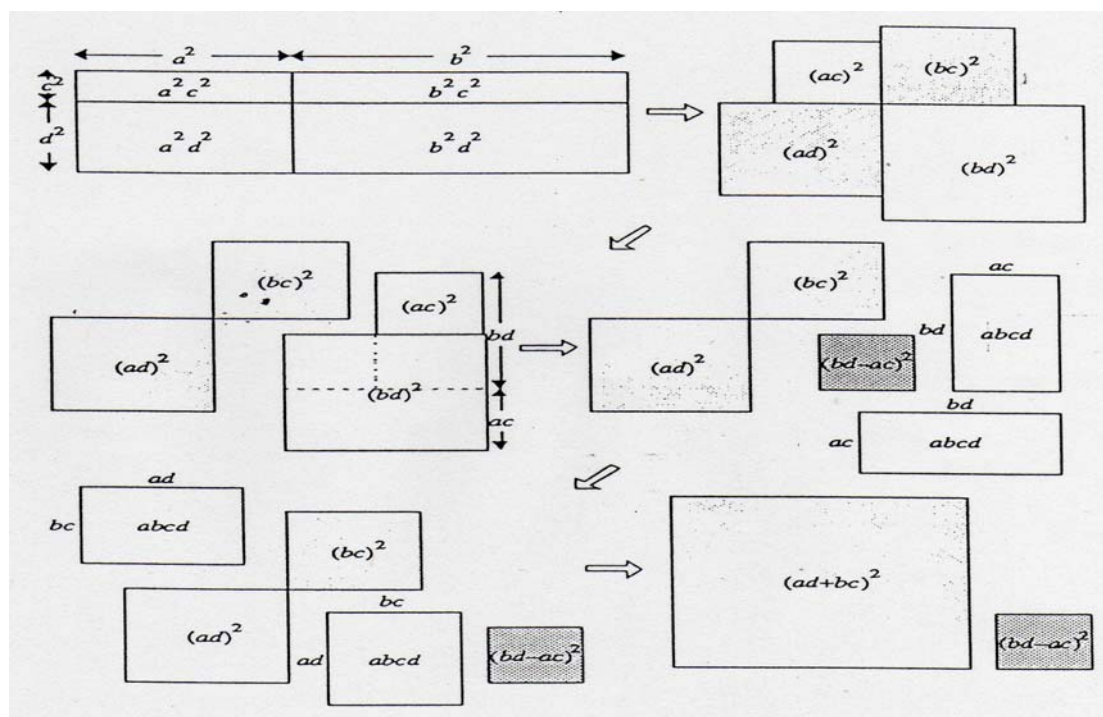
圖一、斐波納契

## 貳、如何證明

### 一、不言而喻的證明 (Proof without words)

不言而喻的證明可以參考 Roger B. Nelsen 於 *Mathematics Magazine* 所發表的 “Proof without Words: Diophantus of Alexandria's "Sum of Squares" Identity.”，如

圖二所示：



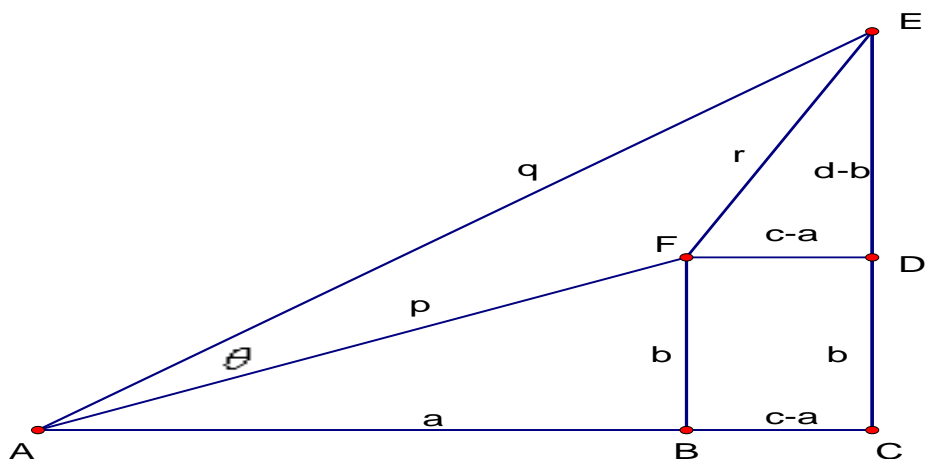
圖二

這個證明利用長方形面積的重整概念，非常適合做為數學思考的題材。

## 二、三角形的幾何證明

三角形的幾何證明：令  $\overline{AC} = c, \overline{CE} = d, \overline{AB} = a, \overline{BF} = b, \overline{AF} = p, \overline{AE} = q, \overline{EF} = r$ ， $\angle EAF = \theta, \angle ABF = \angle ACE = \angle FDE = 90^\circ$ ，則  $\overline{BC} = \overline{FD} = c - a$ ，如圖三。由畢氏定理知  $p^2 = a^2 + b^2, q^2 = c^2 + d^2, r^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2$ ，在  $\triangle EAF$  中，運用餘弦定理得  $\cos \theta = \frac{p^2 + q^2 - r^2}{2pq}$ ， $2pq \cdot \cos \theta = p^2 + q^2 - r^2$ ，化簡得  $pq \cdot \cos \theta = ac + bd$ ，平方得  $p^2 q^2 \cdot \cos^2 \theta = (ac + bd)^2$ ， $p^2 q^2 = (ac + bd)^2 + (pq \sin \theta)^2$ ，又  $a\triangle EAF = a\triangle ACE - a\triangle ABF - a\triangle DEF - a\Box BCDF$ ，代面積公式即  $\frac{1}{2} pq \sin \theta = \frac{1}{2} cd - \frac{1}{2} ab - \frac{1}{2} (c - a)(d - b) - b(c - a)$ ，化簡得  $pq \sin \theta = ad - bc$ ，代入上式，即費伯納西恆等式  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ 。<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 參考梭爾著、胡守仁譯，《數學家是怎麼思考的一純粹帶來力量》（台北：天下遠見出版社，2006），頁 47-48。



圖三

這個證明非常具有數學魅力，只用具備高一數學程度，定能通曉，然如何思索得知？才是研究數學的重心所在。

### 三、代數證明

代數證明需引進共軛複數（Conjugate complex number），此時的費伯納西恆等式變得十分可親了（Accessible），這就是萊布尼茲所利用的複數分解方式：

$$\begin{aligned}
 (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= [(a + bi)(a - bi)][(c + di)(c - di)] \\
 &= [(a + bi)(c - di)][(a - bi)(c + di)] \\
 &= [(ac + bd) + (bc - ad)i][(ac + bd) - (bc - ad)i] \\
 &= (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2 \\
 &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2
 \end{aligned}$$

與上述類似的證明如下：因為  $|(a + bi)(c + di)| = |a + bi||c + di|$ ，根據複數運算得  $|(ac - bd) + (ad + bc)i| = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2}$ ，兩邊平方得  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ 。

上兩例根據複數來證明斐波納契恆等式，不僅簡單易懂，而且令人讚嘆數學的精巧，丟番圖、斐波納契兩位代數大師在有生之年，恐怕都難以如此料想。

### 參、推廣與研究

斐波納契恆等式是否為可推廣的恆等式呢？這是一個值得深思及討論的數學問題，根據《數學家是怎麼思考的一純粹帶來力量》第 67 頁所陳述的：「目前我們有 1、2、4、8 個平方和的等式。下一個是什麼？顯然，我們想到 16，可惜不對，這個序列斷了。」

- 「一個」平方和： $(a^2)(x^2)=(ax)^2$ ；
- 「兩個」平方和： $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$ ；
- 「四個」平方和： $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)=(ax+by+cz+dt)^2+(bx-ay+dz-ct)^2+(cx-dy-az+bt)^2+(dx+cy-bz-at)^2$ 。

據說這個「四個」平方和公式讓歐拉（Euler，Léonard, 1707-1783）想了十三年（約 1730-1742）才有所結果，因此，上式稱為歐拉四數平方和恆等式（Euler Four-Square Identity）。之後，數學界發生遽變，便是四元數（Quaternion）的誕生。這個四元數為數學家漢米爾頓（William Rowan Hamilton, 1805-1865）（圖四）於 1843 年所創造的，根據漢米爾頓自述：

1843 年 10 月 16 日，當我和漢米爾頓太太步行去都柏林途中的勃洛翰橋的時候，它們就來到了人世間，或者說出生了，發育成熟了。這就是說，此時此地我感到思想的電路接通了，而從中落下的火花就是  $i, j, k$  之間的基本方程，恰恰就是我後來使用它們的那個樣子，我當場抽出筆記本（它還保留著），將這些思想紀錄下來，與此同時，我感到也許值得花上未來的至少 10 年或許 15 年的勞動，但當時已完全可以說，我感到一個問題就在那一刻已經解決了，智力該緩口氣了，它已經糾纏著我至少 15 年了。



圖四、漢米爾頓

這種新的代數運算模式，例如：乘法運算不滿足交換律（Communicative law）的方式，改變了許多數學家的思考，因此，可利用四元數的方法證明上述複雜的式子，根據首先四元數運算定義：

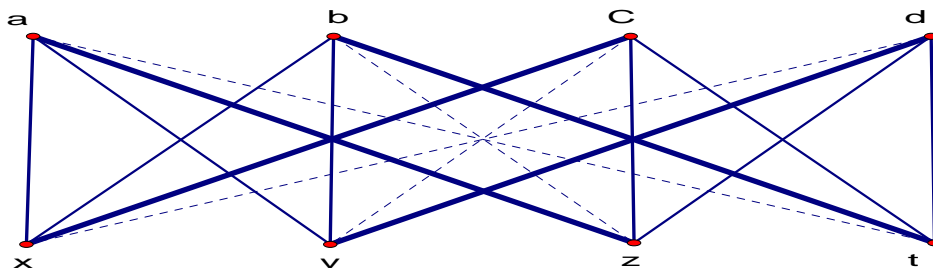
$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j, ji = -k, kj = -i, ik = -j,$$

四元數的乘法運算表如下：

相乘積	A	bi	cj	dk
x	Ax	bxi	cxj	dxk
-yi	-ayi	by	cyk	-dyj
-zj	-azj	-bzk	cz	dzi
-tk	-atk	btj	-cti	dt

$$\begin{aligned} \text{此即 } (a+bi+cj+dk)(x-yi-zj-tk) &= (ax+by+cz+dk) + (bx-ay+dz-ct)i \\ &\quad + (cx-dy-az+bt)j + (dx+cy-bz-at)k \end{aligned}$$

或利用行列式的方式如下所示，這是筆者經過長時間思索得來的，是不是有點像帕普斯定理（Pappus' theorem）的圖形呢？



$$\begin{aligned} \text{此即代表 } & (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = (ax + by + cz + dt)^2 \\ & + \left( \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & d \\ z & t \end{vmatrix} \right)^2 + \left( \begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & d \\ y & t \end{vmatrix} \right)^2 + \left( \begin{vmatrix} a & d \\ x & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} \right)^2. \end{aligned}$$

直到 1818 年，「八個」平方和才由丹麥數學家狄根（Ferdinand Degen, 1766-1825）發現的，如下所示：

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2)(m^2 + n^2 + o^2 + p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + t^2) \\ & = (am - bn - co - dp - eq - fr - gs - ht)^2 + (bm + an + do - cp + fq - er - hs + gt)^2 \\ & + (cm - dn + ao + bp + gq + hr - es - ft)^2 + (dm + cn - bo + ap + hq - gr + fs - et)^2 \\ & + (em - fn - go - hp + aq + br + cs + dt)^2 + (fm + en - ho + gp - bq + ar - ds + ct)^2 \\ & + (gm + hn + eo - fp - cq + dr + as - bt)^2 + (hm - gn + fo + ep - dq - cr + bs + at)^2. \end{aligned}$$

由於上式也曾被數學家格拉夫茲（John Thomas Graves, 1806-1870）及凱里發現，因此，又稱為「狄根-格拉夫茲-凱里的八數平方和恆等式」（The Degen-Graves-Cayley Eight-Square identity）。

## 參考文獻

- Fibonacci (Sigler, L. E. tr.) (1987). *The Book of Squares*. New York: Academic Press, Inc.
- Nahin, Paul J. (1988). *An Imaginary Tale: the story of  $\sqrt{-1}$* . New Jersey: Princeton University Press.
- Nelsen, Koger B., Lewis & Clark College (1993). *Proofs without words I: Exercises in visual thinking*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.