國立新化高級中學101學年度第一次專任及代理教師甄選初試**數學科**試題

一　填充題：每格4分

1. 設 $a_n=2^{n-1}$，n 是正整數，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2^{a_1})(1+2^{a_2})(1+2^{a_3})\cdots(1+2^{a_n})}{2^{a_1+a_2+\cdots+a_n}}=$ __4__ 。

2. 設 a 為整數，若多項式 $f(x)=(x-2012)(x-2010)(x-a)-48$ 有整係數一次因式，試求 $a=$ __1997 或 1993 或 2017 或 2002 或 2003 或 2004 或 2008 或 2014 或 2059__ 。

3. 在 1 與 19 間插入 $2n$ 個數，使其成為$(2n+2)$項之等差數列，設公差為 d，若此數列前 $n+1$ 項之和與後 $n+1$ 項之和的比為 1：3，求數對$(n,d)=$ __(4,2)__

4. 從集合$\{2,2^2,2^3,\cdots\cdots,2^{25}\}$中任意選取兩個不同的 a 及 b。 求 $\log_a b$ 為整數的機率= $\dfrac{31}{300}$ 。

5. 甲乙兩人分別解同一個三元一次聯立方程組 $\begin{cases}x+2y+z=1\\3x+4y+az=-1\\2x+10y+5z=c\end{cases}$，甲不小心抄錯了數字 a，解得方程組有無限多解；乙不小心抄錯 c，解得方程組的解為 $x=4$，$y=-2$，$z=1$，則此方程組真正的解為 __(-3,2,0)__ .

6. 附表為某抽樣的六位同學在智育(x)與體育(y)的分數(採十分制):

求體育(y)對智育(x)的迴歸式= __y=0.75+0.75x__ 。

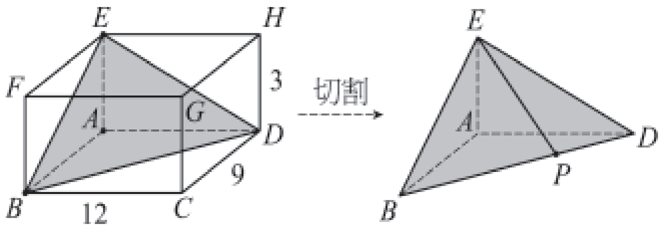
編號	智育	體育
1	6	5
2	6	6
3	8	7
4	9	7
5	6	4
6	7	7

7. x,y 為實數，求 $\sqrt{(x-4)^2+9}+\sqrt{(y-7)^2+1}+\sqrt{x^2+y^2}$ 之最小值= __$5\sqrt{5}$__ 。

8. a、b、c 為相異定實數，且 $f(x)=\dfrac{a(x+a)^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b(x+b)^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c(x+c)^2}{(c-a)(c-b)}$，求 $f(-\dfrac{a+b+c}{2})$ = __0__ 。

9. 臺灣高鐵從第一車到第 12 車共有 12 節車廂，為了加強服務乘客，要指定其中四節車廂設置自動販賣機．若設置自動販賣機的 4 節車廂要兩兩不相銜接且第 6 車為商務車廂必定設置，則共有__40__種方法．

10. 如右圖所示，長方體 $ABCD—EFGH$ 中 $\overline{BC}=12$，$\overline{CD}=9$，$\overline{DH}=3$．現在將長方體 $ABCD—EFGH$ 沿平面 BDE 切割成兩個立體圖形，其中一個為四面體 $E—ABD$，若點 P 在 $\overline{BD}$ 上且 $\overline{BP}:\overline{PD}=2:1$，求 $\overline{PE}$ 長度為 $\sqrt{82}$ ．



11. 兩物體 A 與 B 經由一系列步驟同時等速在座標平面上移動，每次移動一個單位。物體 A 從(0,0)開始移動，且每一步驟是向右或向上，兩者機率一樣。物體 B 從(5,7)開始移 動，且每一步驟是向左或向下，兩者機率一樣，則兩物體 A 與 B 相遇的機率為 $\dfrac{397}{2048}$。

12. 連續擲一個均勻公正骰子兩次。第一次出現 x 點，第二次出現 y 點，求 $\dfrac{x+y-|x-y|}{2}$ 之期望值= $\dfrac{91}{36}$ 。

13. 若 $x^4+x+1=0$ 之四根為 r_1,r_2,r_3,r_4，又 $p(x)=x^2-2$，求 $p(r_1)\times p(r_2)\times p(r_3)\times p(r_4)$ = __23__ 。

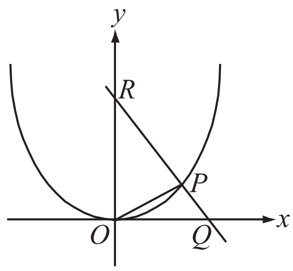
14. 過$(0,0)$恰有三相異直線與$y=x^3+ax^2+1$相切，則 a 之範圍為$\underline{a>3}$.

15. 設z_1、z_2為複數，$|z_1|=3$、$|z_2|=5$，且$|z_1+z_2|=7$，則$(\frac{z_2}{z_1})^3$之值為 $-\frac{125}{27}$(化成最簡分數)。

16. 二數列$\langle a_n\rangle$、$\langle b_n\rangle$具有$a_1=1$，$b_1=1$，且$\forall n\in N$，$\begin{cases}a_{n+1}=a_n-2b_n\\ b_{n+1}=a_n+4b_n\end{cases}$。求$a_n=$

$\underline{2^{n+1}-3^n}$ 。

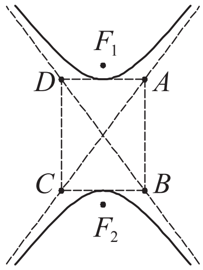
17. 如右圖設$a>0$，點$P(3a,a^2)$在 Γ： $y=\frac{1}{9}x^2$上，點Q在x軸正向上，且$\overline{OP}=\overline{OQ}$，直線$\overleftrightarrow{PQ}$交$y$軸於$R$點，當$P$沿曲線 Γ 趨近於原點時，試求點R的極限位置坐標為$\underline{(0,18)}$.



18. ΔABC中，$\angle B=90^\circ$，且$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，若$\forall x\in R$，恆有$ax^2+bx+c\geq 0$，求$\angle A$之最大值=$\underline{75^\circ}$ 。

19. $\triangle ABC$中，$A(4,0,0)$，$B(0,4,0)$，$C(0,0,4)$，M為$\overline{BC}$中點，今將C點沿$\overline{AM}$對折至C'點使$\overline{BC'}=2\sqrt{2}$，則C'點坐標為 $(\sqrt{2},3+\sqrt{2},1+\sqrt{2})$或$(-\sqrt{2},3-\sqrt{2},1-\sqrt{2})$。

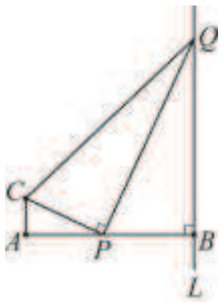
20. F_1，F_2為圖中雙曲線 Γ 的兩個焦點，$ABCD$為矩形，兩直線AC，BD為 Γ 的漸近線．若有一點P到兩漸近線的距離都是8，且P不在貫軸上，又$\overline{AB}=8$，$\overline{AD}=6$，求$\triangle PF_1F_2$的面積 $=\underline{50}$.



21. 某籃球選手經常作罰球線投籃練習，依過去經驗，當他前一球投進時，下一球的命中率為$\frac{4}{5}$；當他前一球不進時，下一球的命中率為$\frac{3}{5}$．設此選手第一球投進，試求第 n 球投進的機率為 $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$．(以 n 表示)

22. 有一箱子內一開始裝有 2 個白球，曉明從箱子內玩抽球遊戲，每一次曉明從箱子中任取一球，取完球後再擲一骰子，若出現 3 的倍數的點數，則另取一個黑球與所抽出的球交換並將黑球放入箱子內，否則另取一個白球與所抽出的球交換並將白球放入箱子內，使箱子內仍保持 2 個球，再做下一次抽取，求曉明抽很多次後，箱子內有 2 個白球的機率= $\frac{4}{9}$。

23. 如圖，$\overline{AB}\perp\overline{AC}$ 且 $\overline{AB}\perp L$ 於 B，$\overline{AB}=14$，$\overline{AC}=3$，P、Q 分別為 $\overline{AB}$、L 上的動點，滿足 $\angle CPQ=90°$，求$\triangle CPQ$ 的最大面積為__75__．



二 申論題(8%)

高中數學中經常有”求極值”問題，請略述各種方法並舉例說明之如:

(1)配方法求極值:若 $f(x)=2(x-2)^2-5$ 則當 x=2 時 $f(x)$有最小值-5

(2)