數學科 試題卷

一、填充題：(每題 7 分，共 63 分)

右上圖數字排列：

```
          1
        3   3
      5   6   5
    7   11   11   7
  9   18   22   18   9
```

1. 如右圖所示，令第 i 行第 k 個數字為 $f(i,k)$，此圖中之規則為 $f(i,1)=2i-1=f(i,i)$，且 $f(i,k)=f(i-1,k-1)+f(i-1,k)$，其中 $2 \le k \le i-1$。則 $f(i,3)$ 之值為 $\underline{\frac{1}{3}i^3 - \frac{3}{2}i^2 + \frac{25}{6}i - 3}$

2. 設 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-3x}$。令 $f_1(x)=f(f(x))$，且 $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$，$n \ge 2$ 且 $n \in N$，則 $f_{2012}(2012)$ 之值為 $\underline{2012}$。

3. 若 z 為複數，$\arg(z^2-8)=\dfrac{5\pi}{6}$，$\arg(z^2+8)=\dfrac{\pi}{3}$，則 z 之值為 $\underline{\pm(\sqrt{2}+\sqrt{6}i)}$。

4. 在袋中有紅球、白球各 100 個，每次從中取出一個球，若為紅球即得 1 分，白球不計分，滿足下列任一條件即停止：(1)得分達 5 分，(2)取出球數達 10 個。試問取球過程會出現幾種不同的方法？$\underline{638}$。

5. 設 x,y 均大於 0，則聯立方程組 $\begin{cases} \dfrac{4x+3y-6}{4x+3y}=\dfrac{2}{\sqrt{x}} \\ \dfrac{4x+3y+6}{4x+3y}=\dfrac{4}{\sqrt{y}} \end{cases}$ 之解 (x,y) 為 $\underline{(\frac{5}{3}+\sqrt{6},\ \frac{20}{3}+\frac{8}{3}\sqrt{6})}$。

6. 已知 $n \in N$，且 n 為 6 的倍數，則 $C_0^n+C_3^n+C_6^n+\cdots+C_n^n$ 之值為 $\underline{\frac{1}{3}(2^n+2)}$。

7. 已知空間中兩點 $A(7,6,3)$、$B(5,-1,2)$，直線 $L:\dfrac{x-1}{2}=y=\dfrac{z-3}{-2}$，且 P 為 L 上之點。若 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值時，P 點之坐標為 $\underline{(\frac{11}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3})}$。

8. 令 $\triangle ABC$ 的外心為 O，垂心為 H。若 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 3，$\angle A=60°$，$\angle B=45°$，則 $\overline{OH}^2$ 之值為 $\underline{18-9\sqrt{3}}$。

9. 不等式 $\log_{14}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x})>\log_{64}x$ 之解集合為 $\underline{\{x \mid 0<x<64\}}$。

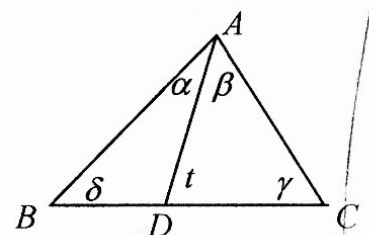二、計算與證明題：(共 37 分)

最大面積為 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}ab$

1. 設 $a>b>0$，則橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 之內接三角形面積最大值為何？(5 分)試證之。(8 分)

2. 如右圖 $\triangle ABC$ 中，D 為 $\overline{BC}$ 上任一點，$\angle BAD=\alpha$，$\angle CAD=\beta$，$\angle ACD=\gamma$，$\angle ABD=\delta$，$\angle ADC=t$，試證：
$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta+\gamma)=\sin\alpha\cdot\sin\gamma+\sin\beta\cdot\sin\delta$。(12 分) （送分）

3. 已知 $a_0=1$，且 $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}^2}$，其中 n 為任意正整數。試證：$a_n \le \dfrac{3}{4\sqrt{n}}$，$n \in N$。(12 分)