

國立瑞芳高工 101 學年度 (學科筆試)

第一次專任教師甄試 數學 試題卷

一、填充題：共 20 題，每題 4 分。

01、設  $a_1, a_2, \dots, a_{50}$  是從  $-1, 0, 1$  這三個整數中取值的數列。若  $a_1 + a_2 + \dots + a_{50} = 9$ ，且  $(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 1)^2 + \dots + (a_{50} + 1)^2 = 107$ ，則  $a_1, a_2, \dots, a_{50}$  當中有幾項是 0？

02、設  $\alpha, \beta, \gamma$  為  $2x^3 - 3x^2 - 4x - 8 = 0$  之三根，求  $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\gamma+1} =$  \_\_\_\_\_。

03、設  $x$  為任意實數，則函數  $f(x) = \frac{\cos x + 2\sin x}{\cos x + 2\sin x + 10}$  的最大值為？

04、投擲一顆骰子 5 次，出現點數依次以  $a, b, c, d, e$  表之，則  $(a-b)(b-c)(c-d)(d-e) = 0$  的機率 = \_\_\_\_\_。

05、若數列  $\langle \theta_n \rangle$  滿足  $\cos \theta_n = 1 - \frac{1}{2n^2}$ ，則  $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^2\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = ?$

06、十名學生數學之平時成績 (X) 與段考成績 (Y) 如下表：

X	62	66	60	64	72	68	66	62	60	60
Y	64	72	58	72	82	80	68	68	76	60

求 Y 對 X 的迴歸直線方程式為 \_\_\_\_\_。

07、在坐標平面上 A (4, 6) 處有一光源，則將圓  $C: x^2 + y^2 + 6x - 4y + 12 = 0$  投射到 x 軸的影長 = \_\_\_\_\_。

08、方程式  $x^2 - 2x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$  的所有實數根之和為？

09、一個直圓柱體的體積為  $54\pi$ ，求其全表面積的最小值？

10、若橢圓  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  的切線在第一象限與二坐標軸圍出一個三角形，則此三角形面積的最小值？

11、設  $z = -1 + \cos 100^\circ + i \sin 80^\circ$ ，則  $\text{Arg}(z) = ?$

12、小明向銀行貸款 100 萬元，約定從次月開始每月還給銀行 1 萬元，依月利率 0.6% 複利計算，則小明大約需要  $n$  年 ( $n \in \mathbf{N}$ ) 可還清，求  $n = ?$  (已知  $\log 2 = 0.3010$ ,  $\log 1.006 = 0.0026$ )

13、求  $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} =$

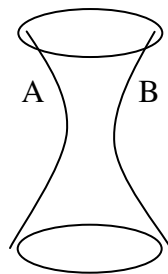
14、設  $f(x) = \frac{x+2}{|x-5|^3}$ ，求  $f'(2) = ?$

15、求拋物線  $y = -x^2 + 4x - 3$  及其在點  $(0, -3)$ 、 $(4, -3)$  之二切線所圍區域之面積？

16、已知  $L_1 : x - 1 = y = 4 - z$ 、 $L_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-5}$  為空間中一組歪斜線，  
試求：此兩直線  $L_1$ 、 $L_2$  的距離 = \_\_\_\_\_。

17、設  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ，求  $\sum_{n=1999}^{2012} A^n =$  \_\_\_\_\_。

18、有一工廠生產一種座椅，其外型是由雙曲線的一支繞其共軛軸旋轉所成的曲面（如下圖所示），  
已知  $A$ 、 $B$  是雙曲線的頂點，座椅的上下底直徑均為 40 公分，高 60 公分， $\overline{AB} = 20$  公分，  
求座椅的體積 = \_\_\_\_\_ 立方公分。



19、根據市場調查結果，預測某種電腦零件，從今年 101 年 1 月 1 日開始的  $n$  個月累積的需求量為  $S_n$  萬件，  
滿足  $S_n = \frac{n}{3}(-n^2 + 24n - 11)$ ，其中  $n = 1, 2, 3, \dots, 12$ ，按此預測，在 101 年度內，需求量超過 54 萬件的月份  
是哪幾個月份？ \_\_\_\_\_。

20、對矩陣  $\begin{bmatrix} a & b & 1 & 5 \\ 2 & b & c & 0 \\ a & 3 & c & -1 \end{bmatrix}$  作列運算若干次後得到  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，則  $abc =$  \_\_\_\_\_。

## 二、計算證明題：共 2 題，每題 10 分。

01、設有一正圓錐體高 120cm，底半徑為 50cm，求內接於正圓錐之正圓柱體尺寸，使其體積最大？

02、試證： $M$  個產品中有  $n$  個不良品 ( $M > n$ )，今從這  $M$  個產品中，隨機取出  $k$  個 ( $n > k$ )，則取出不良品個數的期望值為  $\frac{kn}{M}$ 。