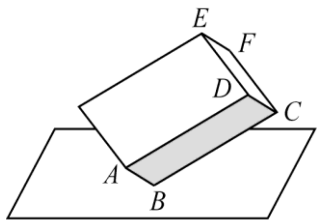
國立嘉義女中101學年第一學期第一次新聘教師甄試 <u>數學科</u> 筆試題目卷

一、填充題：（10題共10格，每題 8 分，共 80 分 ）

1. 已知三點 A（3，0），B（0，3），C（$\cos\alpha$ ，$\sin\alpha$ ），且 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=-1$，

   則 $\dfrac{2\cos^2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cot\alpha}=$＿＿＿＿＿＿＿。

2. 如右圖，空間中有一長方體，除了頂點 $B(0,0,0)$ 在 xy 平面上，其餘頂點均在 xy 平面的上方，且長 $\overline{DA}=\sqrt{21}$，寬 $\overline{DC}=\sqrt{6}$ 高 $\overline{DE}=2\sqrt{14}$，若 $A(-2,-1,1)$, $C(1,2,4)$，則E點坐標為＿＿＿＿＿。



3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)=$＿＿＿＿＿＿＿。

4. 求一物體由一拋物面 $x^2+4y^2+z=4$ 及 xy 平面所圍成的體積＿＿＿＿。

5. 求 $\int_0^3 (x-1)^{-3}dx=$＿＿＿＿＿＿＿。

6. 若 $\begin{cases}2x+3y\le 6\\ -x+y\le 1\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$，求 $-x-3y$ 的最小值 ＿＿＿＿＿＿＿，此時 $(x,y)=$＿＿＿＿＿＿。

7. 已知 x,y,z 為正數，求 $\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}+\dfrac{1}{z+x}\right)(x+y+z)$ 的最小值＿＿＿＿＿。

8. 空間中 $O(0,0,0)$，$P(3,2,1)$，$Q(1,-2,3)$，$R(1,2,-1)$，且 $\overrightarrow{OA}=\alpha\overrightarrow{OP}+\beta\overrightarrow{OQ}+\gamma\overrightarrow{OR}$ 則滿足 $0\le\alpha,\beta,\gamma\le 3$ 的所有 A 點的體積為＿＿＿＿＿。

9. 設三個珠寶盒中每一個珠寶盒都有兩個抽屜，又設第一個珠寶盒的兩個抽屜都放金塊，第二個珠寶盒有一個抽屜放金塊，另一個抽屜放銀塊，第三個珠寶盒的兩個抽屜都放銀塊，設對珠寶盒及抽屜的選擇機會相等。任意抽出一珠寶盒及任意打開其中一抽屜，若打開之抽屜有金塊，試求在同一珠寶盒之另一個抽屜也有金塊之機率為多少? ＿＿＿＿＿。

10. 設 A（7，6，3），B（5，-1，2）及直線 L：$\dfrac{x-1}{2}=y=\dfrac{3-z}{2}$，求 L 上一點 P， 滿足 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 為最小值，此時 P 點坐標為＿＿＿＿＿＿。

二、計算及證明題：(每題 10 分，共 20 分)

1. 已知函數 $f(x)=x^3-2x^2+x-1$ ，$g(x)=-x^2+3x-1$，求

(1) $f(x)$ 與 $g(x)$ 的交點坐標。（3 分）

(2) 曲線 $f(x)$ 與 $g(x)$ 所圍成的區域面積。(7 分)

2. 試證 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-nx}$ 均勻收斂，$\forall \ x\in[0,\infty)$ 。

國立嘉義女子高級中學101學年度數學科第一次教師甄選
參考答案卷

一、填充題：(10 題共 10 格，每題 8 分，共 80 分)

1.	2.	3.	4.	5.
$-\frac{5}{9}$	(3，-5，7)	$-\frac{1}{2}$	4π	divergence or 發散
6.	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**
$(x,y)=(\frac{3}{5}，\frac{8}{5})$ 最小值 $-\frac{27}{5}$	$\frac{9}{2}$	0	$\frac{2}{3}$	$(\frac{11}{3}，\frac{4}{3}，\frac{1}{3})$

二、計算及證明題：(每題 10 分，共 20 分)

1. (1) $f(x)$ 與 $g(x)$ 的交點坐標為（-1，-5），（0，-1），（2，1） （3 分）

   (2) 曲線 $f(x)$ 與 $g(x)$ 所圍成的區域面積 $\frac{37}{12}$ （7 分）

2. 試證 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-nx}$ 均勻收斂，$\forall \quad x\in[0,\infty)$ 。

Pf：利用 Abel's test. Let $\varphi_n(x)=e^{-nx}$， for $x\geq 0$,

$\varphi_n(x)\geq\varphi_{n+1}(x)$ 遞減， （2分）

而且 $|\varphi_n(x)|=\left|\frac{1}{e^{nx}}\right|\leq 1$ （2分）

已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots)=-\ln 2$ converges。 （2分）

By Abel's theorem

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-nx}$ 均勻收斂。 （4分）

國立嘉義女子高級中學101學年度數學科第一次教師甄選答案卷

准考證號：____________________姓　　名：___________________

總　分

一、填充題：(10題共10格，每題8分，共80分)

1.	2.	3.	4.	5.
6.	7.	8.	9.	10.

二、計算及證明題：(每題 10分，共 20 分)

1.

2.