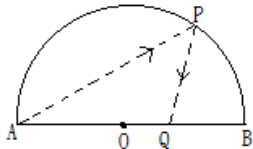


臺北市立復興高級中學 101 學年度第一次正式教師甄選

數學科教師甄選筆試題目卷

注意：本科試題共 1 頁。請確認試題內容、題號，並請考生注意時間掌握。

1. 設多項式 $f(x) = x^{30} + 1$ ， $g(x) = (x^3 + 1)(x^6 - 4)$ ，求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式。
2. 高一開始介紹對數函數，試證明： $0.3 < \log 2 < 0.4$ 。
3. 是否能找出三個相異的自然數，使得任意兩數的和被第三個數除之所得的餘數均為 1？
4. 設 a, b, c 均為正數，試證： $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ 。
5. 複數平面上， O 表原點，二複數 z_1 與 z_2 的幅角分別為 θ 與 $-\theta$ ， $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ ，其對應點分別為 P 點與 Q 點。
若三角形 OPQ 的面積為定值 S ，而三角形 OPQ 的重心為點 G ，證明： \overline{OG} 長的最小值為 $\frac{2}{3}\sqrt{S \cdot \cot \theta}$ 。
6. 設點 Q 對拋物線 $y = x^2 + 1$ 上的任意點 P 都滿足內積 $\overline{OP} \cdot \overline{OQ} < 1$ ，其中 O 為原點，試繪圖表示點 Q 所在的區域。
7. 右圖為以 O 為圓心的半圓，今在直徑一端點 A 裝置一雷射，由物理學得知，當雷射光束碰到半圓時，必反射後到達直徑上的某一點，請問若光束趨近於直徑時，則反射後會落在直徑的何處？

8. 設 a 是實數，在 $0 \leq x \leq 1$ 間的曲線 $y = x(x-a)(x-1)$ 與 x 軸所圍成的區域之面積記為 $S(a)$ 。
(1) 求 $S(a)$ 。
(2) 求 $S(a)$ 的最小值。
9. 設一籃球選手經常做罰球線投籃練習，當他投進一球後，則下一球投進的機率為 0.8；當他有一球投不進後，則下一球投進的機率為 0.6，令 P_n 表示這位選手在投籃練習第 n 球次投進球的機率。某天這位選手再做練習，若他第一球投進了，即 $P_1 = 1$ ，
(1) 求 P_2, P_3, P_4 。
(2) 求第 n 球也投進的機率 P_n 。(以 n 表示)
(3) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ 。
10. 郵局有一種 1 元的郵票，兩種 2 元的郵票。現在要寄一件郵資 15 元的郵件，將購得的郵票(1 元的或 2 元的)在郵件上貼成一行，請問有幾種貼法？