

桃園縣縣立高級中學 101 學年度教師聯合甄選筆試試題

科目：數學科

說明：本試卷共分選擇題與非選擇題兩部份。第壹部份：選擇題占52%，請用 2B 鉛筆，直接於「答案卡」上，依題號畫記作答，修正時應以橡皮擦拭乾淨，切勿使用修正液(帶)，答案卡因考生畫記不清、污損…等人為因素導致讀卡錯誤或不能讀卡，由考生自行負責不得有異議；第貳部份：非選擇題占48%，請使用黑色或藍色原子筆、鋼珠筆或中性筆，在「答案卷」上作答。於試題卷上作答者，不予計分。本試題卷連同答案卡、答案卷一併交回，違規攜出試場者以零分計算。

第壹部份：選擇題

(一)單一選擇題：(共 3 題，占 12 分)

說明：第 1 題至第 3 題為單一選擇題。每題請選出一個最適當的選項畫記於答案卡上。每題答對得 4 分，答錯倒扣1/4題分。

1. 已知二次不等式 $ax^2 + 2ax + 3x + 4a < 0$ 無實數解，求實數 a 的範圍？

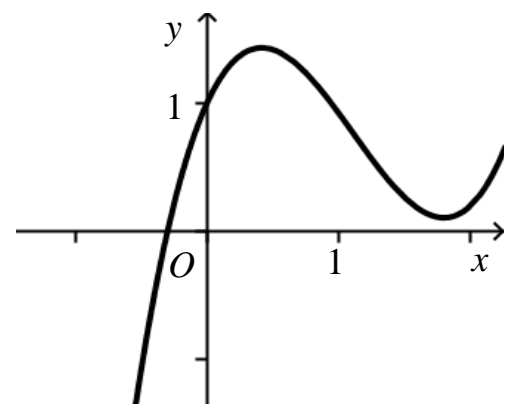
- (A) $\frac{3}{2} \leq a$
- (B) $a < -\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2} < a$
- (C) $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$
- (D) $a < -\frac{1}{2}$

2. 在 xy 坐標平面上，設 $x \neq 0$ ，試問雙曲線 $y = \frac{3x}{4} + \frac{1}{2x}$ 的貫軸長為下列那一選項？

- (A) $\sqrt{2}$
- (B) $2\sqrt{2}$
- (C) $\frac{\sqrt{10}}{5}$
- (D) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

3. 右圖為某函數 $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的圖形，則下列四個數值何者最小？

- (A) $a + b + c$
- (B) $f(x) = 0$ 的三根總和
- (C) $f(x) = 0$ 的三根倒數和
- (D) $f(x) = 0$ 的三根乘積



(二)多重選擇題：(共 8 題，占 40 分)

說明：第 4 題至第 11 題為多重選擇題。每題各有5個選項，其中至少有一個是正確的，請於答案卡上畫記作答。每題 5 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得1/5題分，每答錯一個選項，倒扣1/5題分，整題未作答者，不給分亦不扣分。

4. 已知 a 、 b 、 c 、 d 分別為方程式 $2^x + x = 101$ 、 $3^x + x = 101$ 、 $\log_2 x + x = 101$ 、 $\log_3 x + x = 101$ 的解，則下列選項何者正確？

- (A) $a > b$
- (B) $c > d$
- (C) $a > c$
- (D) $a - c = b - d$
- (E) $a + c = b + d$

請翻頁繼續作答

5. 三角形 ABC 中， $\overline{AB}=2$ 、 $\overline{BC}=3$ 、 $\overline{CA}=4$ ，則下列選項何者正確？

- (A) 設 I 為其內心，則 $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = 3$
(B) 設 G 為其重心，則 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC} = 4$
(C) 設 O 為其外心，則 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC} = 5$
(D) 設 M 為 \overline{BC} 中點，則 $\overline{AM} = \frac{\sqrt{31}}{2}$
(E) 設 R 為其外接圓半徑長，則 $R = \frac{8\sqrt{15}}{15}$

6. 定積分 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ 的值等於 (A) π (B) $\pi/4$ (C) 四分之一單位圓的面積 (D) $1-\pi$ (E) 無法計算。

7. 給定橢圓 $x^2/4 + y^2/9 = 1$ 上的點 (x, y) ，則

- (A) $x^2 + y^2$ 的最大值等於 9 (B) $x^2 + y^2$ 的最小值等於 4 (C) 此一橢圓有兩條對稱軸
(D) 橢圓對直線 $y=x$ 成兩側對稱 (E) 橢圓面積為 36π 。

8. 給定調和級數 $1+1/2+1/3+\dots+1/n+\dots$ ，則下列哪一選項成立？

- (A) 它是收斂級數 (B) 它是發散級數 (C) 它的總和 $=\infty$ (D) 它無法求出答案 (E) 以上皆非。

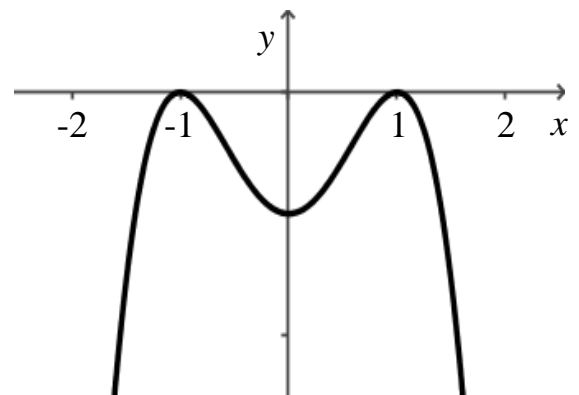
9. 畢氏定理與下列哪一選項有關？

- (A) 座標平面距離公式 (B) 餘弦定律 (C) 指數函數 (D) 歐幾里得 (E) 以上皆非。

10. $2^{\sqrt{2}}$ 是 (A) 實數 (B) 虛數 (C) 複數 (D) $1/2$ (E) 無法定義。

11. 右圖為函數 $f(x) = -(x^2-1)^2$ 的大略圖形。若 $U_n(f)$ 代表將區間 $[-2, 2]$ 平分成 n 等分，在每個分割的小區間取 $f(x)$ 的最大值所得到的黎曼和。請問下列哪些選項正確？

- (A) $U_2(f) \geq U_3(f)$
(B) $U_3(f) \geq U_4(f)$
(C) $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(f) < 0$
(D) $U_n(f) \leq \int_{-2}^2 f(x) dx$
(E) $U_n(f) + U_n(-f) = 0$



第貳部份：非選擇題（共 7 題，占 48 分）

說明：不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在答案卷上。

一、已知 $\sqrt{m^2 + 101m + 2012}$ 為一整數，則整數 m 為何？（5 分）

二、設 $\deg(f(x)) = 3$ ，且已知 $f(1) = 1.7$ ， $f(2) = 1.8$ ， $f(3) = 2.3$ ， $f(4) = 3.2$ ，則 $f(8) = ?$ （5 分）

請翻頁繼續作答

三、一袋中有3個黃球、4個綠球、5個紅球，今每次隨機從袋中取出一球，取後不放回，則紅球最先被取完的機率為何？（6分）

四、某便利商店推出「賞金獵人」企劃，於特定網頁點擊「航海王Q版懸賞圖」活動廣告，每次就能隨機捕捉魯夫、娜美、香吉士、喬巴、佛朗基、布魯克6個角色其中一個可愛角色，試問收集齊魯夫、喬巴兩個角色所需點擊次數的期望值為何？（6分）

五、已知 a 、 b 為實數， $f(x) = ax^2 + bx$ ，滿足 $1 \leq f(1) \leq 2$ ， $2 \leq f(2) \leq 4$ ，若 $P \leq f(3) \leq Q$ ，則數對 (P, Q) 為何？（6分）

六、試利用同餘理論，證明一個整數 $a_1 10^n + a_2 10^{n-1} + \dots + a_{n+1} 10^0$ (其中每一個位數都是 $0, 1, 2, \dots, 9$ 之間的整數，而且 $a_1 \neq 0$)可以被3整除的充要條件是： $a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}$ 可以被3整除。（10分）

七、給定 $y=p(x)$ 為一多項式函數，若 a, b 為任兩實數使得 $p(a)$ 與 $p(b)$ 異號，則存在有 a, b 之間的一個實數 c 使得 $p(c)=0$ 。這是中間值定理，試利用實數完備性證明之。（10分）