臺北市立明倫高級中學 101 學年度第 1 次專任教師甄選數學科筆試試題

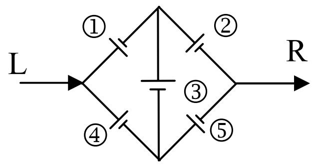
<注意>共有 16 題，每題 8 分，請標明題號，將計算證明過程及答案寫在答案卷上

1. 已知 α 為銳角，$\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{3}{5}$，求 $\sin\alpha$ 之值。

2. 繪圖表示不等式 $(x^2-y^2)[\log_2(9-x^2-y^2)-3]>0$ 之範圍，並求其面積。

3. 設 A,B,C 為橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上三點，而過 C 點之切線，與過 A,B 之兩切線皆垂直。若 C 點坐標為 $(\frac{9}{5},\frac{8}{9})$，則 A,B 兩點坐標為__________與__________

4. 將一個半徑為 4 公分的水晶球，放入一個邊長為 8 公分的正方體容器，想在容器的八個角落再塞入八個半徑相同的小水晶球，則小水晶球的最大半徑為多少公分？



5. 如右圖表示電路，而每個開關可使電流暢通的機率為 p，且彼此不互相影響，則電流由 L 到 R 暢通的機率為何？

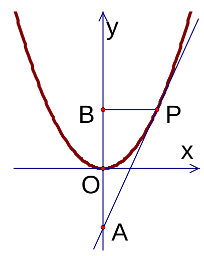
6. 每個人都有兩隻手，在亂點鴛鴦譜的活動中，每隻手都有一個編號，隨機抽選 2 個號碼配對牽手，每人的一隻手都恰與另一隻手(可能是自己或他人的手)握住，相連在一起的人圍成一個圓圈。可能有：一人自成一圈，有 2 人牽成一圈，有 3 人牽成一圈，……。假設 E_n 代表 n 個人所結圓圈數的期望值，

(1)求 E_1 的值。 (2)求第一次抽選的 2 個號碼是同一人之機率 (3)求 $E_n-E_{n-1}=?$ (4)求 E_4 的值。

7. 設 A、B 兩箱中，A 箱內有一黑一白兩球，B 箱內有一白球。甲乙二人輪流取球，每次先由甲自 A 箱內任取一球，放入 B 箱內，再由乙自 B 箱內任取一球，放入 A 箱內，這樣稱為一局。

(1)當第一局結束時，A 箱內兩球為一黑一白的機率為？ (2)當第三局結束時，A 箱內兩球為一黑一白的機率為？

8. 設 P 在拋物線 $y=x^2$ 上，且在第一象限內的任意一點，如圖所示，直線 PB 與 x 軸平行，且交 y 軸於 B 點；直線 PA 是拋物線過 P 點的切線，且交 y 軸於 A 點。若拋物線、直線 PB 與 y 軸所圍的區域面積為 R，ΔPAB 的面積為 T，則比值 $\frac{R}{T}=?$



9. 設 $n\in N$，兩數列 $<a_n>$、$<b_n>$ 滿足 $\begin{cases}a_{n+1}=5b_n+2b_{n+1}\\ b_{n+1}=5a_n-2a_{n+1}\end{cases}$

(1)試求二階方陣 A，使得 $\begin{bmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix}$，$n\in N$。

(2)已知 $a_{100}=5^{50}$，$b_{100}=3\cdot5^{50}$，試求 a_1 及 b_1 之值。

10. 已知函數 $f(x)=2x^3+3ax^2+6(a-1)x+2$，$(a\in R)$，若 $f(x)$ 的圖形與 x 軸相切，且在切點處 $f(x)$ 有極小值，則 a 值為何?

11. 若將一半徑為 R 的球體地球儀浸入水中，使其北極朝上，而北緯 30 度緯線恰與水面齊，則浮出水面部分的體積為何?

12. 若 x 軸為實係數三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 於反曲點 $x=k$ 處唯一的水平切線，則 $x=k$ 為 $f(x)=0$ 的三重根。試證明之。

13. 設 ΔABC 的三邊長分別為 a,b,c，而 Δ 為此三角形的面積，試證：$a^2+b^2+c^2\geq4\sqrt{3}\Delta$。

14. 證明：在坐標平面上，點 $P(x_0,y_0)$ 到直線 $L:ax+by+c=0$ 的距離為 $d(P,L)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

15. 設 $P(x_1,y_1,z_1)$、$Q(x_2,y_2,z_2)$，若 $ax_1+by_1+cz_1+d>0$ 且 $ax_2+by_2+cz_2+d<0$，試證明 P、Q 兩點必在平面 E：$ax+by+cz+d=0$ 之兩側。

16. 學生在求解 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot(n+1)^2+2\cdot(n+2)^2+3\cdot(n+3)^2+\cdots+n\cdot(n+n)^2}{n^4}$ 問題的解法如下：

「此一極限的分子部分每一項次數最多為 n 的 3 的多項式，而分母為 n 的 4 次多項式，

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot(n+1)^2+2\cdot(n+2)^2+3\cdot(n+3)^2+\cdots+n\cdot(n+n)^2}{n^4}=0$」，對於這個解法，你有什麼解釋與看法。