國立基隆高中 95 學年度第 2 次教師甄試初試數學科題目卷

※ 計算及證明題

1. 請依照下列各題中贈與的條件，將『相同的 3 支鉛筆；相同的 2 支原子筆；1 支鋼筆』任意分給甲、乙、丙三人，並分別答覆各題贈與的方法數

(1)甲、乙、丙三人恰各得 2 支筆 (5%)

(2)不限定(甲、乙、丙)任何一人的得筆數量 (5%)

(3) (甲、乙、丙)任何一人至少得到 1 支筆 (5%)

答：(1) 15　(2) 180　(3)　111

2. 設 A 為一個方陣，det$A$ 是 A 的行列式值；A^{-1} 是 A 的乘法反矩陣

已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

(1) det$A$＝？ (5%)

(2) 若 $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}B$，則 B＝？ (5%)

(3) 求三平面 x＋2y－z＝17；2x＋y＝23；x－y－2z＋18＝0 的交點 (5%)

答： (1)-9　(2) $\begin{bmatrix}2 & -5 & 1\\ -4 & 1 & -2\\ 3 & -3 & -3\end{bmatrix}$ (3) (7,9,8)

3. 請依照下列各題中 θ 的條件，答覆曲線 $x^2+y^2\cos\theta=1$ 是何種圖形？ (各 1 分)
並儘量「描述各題中圖形特性」或「作略圖」 (各 2 分)

(1) θ＝0º　(2) 0º ＜θ ＜90º　(3) θ＝90º　(4) 90º ＜θ ＜180º　(5) θ＝180º

(本題共 15 分)

答：(1)單位圓　(2)橢圓　(3)二平行線(x=1,x=-1)　(4)雙曲線　(5)等軸雙曲線

4. a, b, c 為任意三正數，令 $a_1=\dfrac{a+b+c}{3}$，$b_1=\sqrt[3]{abc}$，$c_1=\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$；對所有自然數 i 滿足

$$a_{i+1}=\frac{a_i+b_i+c_i}{3}\quad b_{i+1}=\sqrt[3]{a_ib_ic_i}\quad c_{i+1}=\frac{3}{\frac{1}{a_i}+\frac{1}{b_i}+\frac{1}{c_i}}$$ 。

試證：　(1)$a_n\geq b_n\geq c_n$ (5%)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n$ (10%)

5.設 u, v 均為實數，則 $(\sqrt{5}\cos u+2v-5)^2+(\sqrt{11}\sin u-5v-2)^2$ 之最小值為何？ (15%)

答：$\dfrac{256}{29}$

6. $x\in\mathbb{R}$，試求 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$ 之最大值為何？ (15%)

答：$\sqrt{10}$

7.設 x, y 為整數，$x \geq y$ 且滿足方程式 $\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{3}{7}$ ，求數對(x, y) (10%)

答：(5, 4)