教育部受託辦理 101 學年度國立高級中等學校教師甄選

數學科 試題

> 請注意：本試題共兩部分，選擇題 10 題及綜合題 2 大題，共計 100 分。**選擇題請用 2B軟心鉛筆在答案卡劃記，綜合題請用藍色或黑色鋼筆或原子筆在答案卷上作答**。本科不可以使用電子計算器。

第一部分：選擇題(共40分)

一、**單選題**：(每題4分，共28分)

(D) 1.設 $a_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$i=1,2,\cdots,9$ 為相異 9 個整數，若有 3 個 3 位數，$a_1a_2a_3$，$a_4a_5a_6$，$a_7a_8a_9$ 之乘積為最大，其中 $a_1=9$，問 a_2a_3 為下列哪一數？ (A)87 (B) 81 (C) 63 (D) 41。

(C) 2.設直線 $L:\begin{cases}x+y-3z=3\\2x+2y-z=1\end{cases}$ 與球面 $S: x^2+y^2+z^2=4$ 交於 A, B 兩點，則球面 S 上 A, B 兩點間的最短路徑長為何？ (A)$\frac{\pi}{3}$ (B)$\frac{2\pi}{3}$ (C)$\frac{4\pi}{3}$ (D)$\frac{3\pi}{2}$。

(C) 3.十位考生之國文與數學成績列表如下：

考生編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
國文	89	65	76	69	82	57	66	72	78	66
數學	75	57	65	65	83	63	58	62	63	69

$\bar{X}=72$

$\bar{Y}=66$

$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-72)(y_i-66)}{10\times 8.9\times 7.5}\doteq 0.66$

今算出國文成績之標準差為 8.9 分，數學成績之標準差為 7.5 分（取至小數點第一位），則此十位考生兩科成績之相關係數最接近 (A)−0.85 (B) 0.25 (C) 0.66 (D) 0.78。

(B) 4.設 α、β、γ 為方程式 $2x^3+x^2-x-7=0$ 的三根，將 $\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\beta-1}+\frac{1}{\gamma-1}$ 之值四捨五入後可以得到下列何數？(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。

$\div n^5 \div n^3$

(D) 5.若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)(1^5+2^5+\cdots\cdots+n^5)}{(1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3)(1^4+2^4+\cdots\cdots+n^4)}=\frac{b}{a}$（$a$，$b$ 為整數，且 $\frac{b}{a}$ 為一最簡分數），則 $a+b=$ (A) 37 (B) 29 (C) 22 (D) 19。

$\div n^5 \div n^3$

(C) 6.n 為正整數且 $n\le 110$，則滿足 $(\sin\theta+i\cos\theta)^n=\sin n\theta+i\cos n\theta$ 之所有 n 其總和＝ (A)1851 (B)1750 (C)1540 (D) 2320。

1. $a_1, a_4, a_7 \in \{9,8,7\}$

$a_2, a_5, a_8 \in \{6,5,4\}$

$a_3, a_6, a_9 \in \{3,2,1\}$

設 $\begin{cases}A=a_1a_2a_3\\B=a_4a_5a_6\\C=a_7a_8a_9\end{cases}$ $\quad \frac{A+B+C}{3}\ge\sqrt[3]{ABC}$

等號成立時 $A=B=C$

∴ $A\times B\times C$ 最大時 A、B、C 三數差距最小

∴ 三數 $\boxed{941}$、852、763

2. $L:\begin{cases}x+y-3z=3\\2x+2y-z=1\end{cases}$ $\Rightarrow$ $\frac{(1,1,-3)\times(2,2,-1)}{(-1+6,-6+1,0)}\Rightarrow \vec{d}=(1,-1,0)$

∴ $L:\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=1\end{cases}$ 代入 $S: x^2+y^2+z^2=4 \Rightarrow t^2=\frac{3}{2}$

∴ 設 $A(\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}},1)$ $\quad B(-\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}},1)$

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+1}{2\times 2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

∴ $\theta=\frac{2\pi}{3}$ ⇒ 最短距 $s=2\times\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$

4. $2x^3+x^2-x-7=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\Rightarrow(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)=-\frac{5}{2}$

$6x^2+2x-1=[2(x-\alpha)\cdot(x-\beta)(x-\gamma)]'\Rightarrow$ 分子 $=\frac{7}{2}$

∴ $\frac{7}{5}=1.2$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\left[(\frac{1}{n})^2+(\frac{2}{n})^2+\cdots\right]\cdot\left[(\frac{1}{n})^5+(\frac{2}{n})^5+\cdots\right]}{\left[(\frac{1}{n})^3+(\frac{2}{n})^3+\cdots\right]\frac{1}{n}\left[(\frac{1}{n})^4+\cdots\right]}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_0^1 x^2dx\cdot n\int_0^1 x^5dx}{n\int_0^1 x^3dx\cdot\int_0^1 x^4dx}$

$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}}=\frac{10}{9}$ #

6. $\left[\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)\right]^n$

$\cos(\frac{n\pi}{2}-n\theta)=\sin n\theta$

∴ $n=4k+1$ $\quad 1\le 4k+1\le 110 \Rightarrow 0\le k\le 27$

∴ $\sum_{k=0}^{27}(4k+1)=4\times\frac{27\times 28}{2}+28$

$=28\times(54+1)$

$=1540$ #

8.
$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+\cdots+n)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

∴ $\sum_{k=1}^{20}\frac{6}{k(k+1)(k+2)}=3\sum_{k=1}^{20}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$

$=3\left(\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\right]$

$=3\left(\frac{20}{21}-\frac{10}{22}\right)=30\times\frac{23}{21\times22}=\frac{115}{7\times11}$

∴ $a=7\times11=77$
$b=115$

二、**複選題** (每題4分，共12分，全對才給分，答錯不倒扣)

(AC) 8. 若 $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+(1+2)}+\frac{1}{1+(1+2)+(1+2+3)}+\frac{1}{1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+4+5+\cdots\cdots+18+19+20)}=\frac{b}{a}$（$a$，$b$ 為整數，且 $\frac{b}{a}$ 為一最簡分數），則下列哪些選項為真？ (A) a 為7之倍數 (B) $b>120$ (C) $a<b$ (D) $a+b>199$。

(AD) 9. 設 f(x) 為一個次數不超過 3 次的實係數多項式函數，滿足 f(1) =1，f(2) =2，f(3) =3，且常數項為 a。下列哪些選項是正確的？ (A)多項式 $f(x)=\frac{-a}{6}(x-1)(x-2)(x-3)+\frac{1}{2}x(x-2)(x-3)+(-1)x(x-1)(x-3)+\frac{1}{2}x(x-1)(x-2)$ (B)可以找到實數 a，使得多項式 y=f(x) 為 2 次多項式 (C)對任意大於 0 的實數 a，方程式 f(x)=0 在 1 與 2 之間一定沒有實根 (D)對任意大於 0 的實數 a，方程式 f(x) =0 在 2 與 3 之間一定沒有實根。

(ABCD) 10. 設 n 是大於1的整數，坐標平面上兩個橢圓區域 $\frac{x^2}{n^2}+y^2\le1$ 和 $x^2+\frac{y^2}{n^2}\le1$，共同的部分以 A_n 表示，請選出正確的選項 (A) A_n 的面積小於4 (B) A_n 的面積大於π (C) A_n 的周長大於5 (D)當 n 趨於無窮大時，A_n 的面積趨近於4。

9.
$f(x)=k_1(x-1)(x-2)(x-3)+k_2(x-1)(x-2)+k_3(x-1)+1$

$f(2)=k_3+1=2\Rightarrow k_3=1$

$f(3)=k_2\times2\times1+2+1=3\Rightarrow k_2=0$

$f(0)=k_1\times(-6)-1+1=a\Rightarrow k_1=\frac{-a}{6}$

∴ $f(x)=-\frac{a}{6}(x-1)(x-2)(x-3)+x$

$f(\frac{3}{2})=-\frac{a}{6}\times0.5\times(-0.5)\times(-1.5)+1.5$

$=1.5\left(1-\frac{a}{6}\times0.5\times0.5\right)$

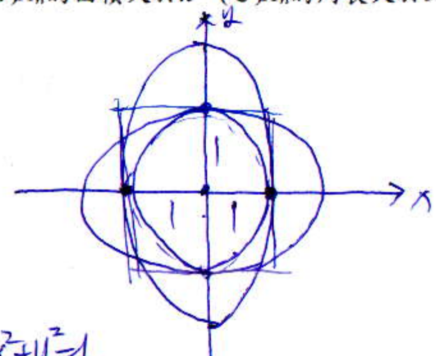
可能正、可能負 ⇒ 無法判別

$f(\frac{5}{2})=-\frac{a}{6}\times(1.5)\times(0.5)\times(-0.5)+2.5$ 恆正

∴ 沒實根 (代點判別 $2<x\le3$，$f(x)>0$)

10. $\Gamma_1:\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{1}\le1$

$\Gamma_2:\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{n^2}\le1$



∴ Γ_1 & Γ_2 4點共圓：$x^2+y^2=1$

∴ $\pi\le A_n\le4$

周長 $2\pi\le l\le8$
$2\pi = 2\times3.14$

1. (1,2) 代入 $\begin{cases} 3+2a+1=0 \Rightarrow a=-2 \\ 3+2b-7=0 \Rightarrow b=2 \end{cases}$

$\therefore$ 設 $(3x-2y+1)(3x+2y-7) \underset{\uparrow (3,0)}{=} (9+1)(9-7)$

$\Rightarrow 9x^2-4y^2-21x+14y+3x+2y-7=20$

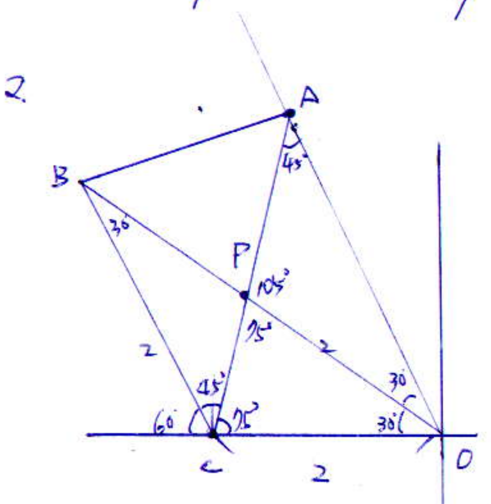
$\Rightarrow 9x^2-4y^2-18x+16y=27$

$\Rightarrow 9(x-1)^2-4(y-2)^2=27+9-16=20$

$\Rightarrow$ 設 $\dfrac{(x-1)^2}{\frac{20}{9}}-\dfrac{(y-2)^2}{5}=1$

$\therefore d=\dfrac{\frac{100}{9}}{\frac{20}{9}+5}=\dfrac{\frac{100}{9}}{\frac{65}{9}}=\dfrac{20}{13}$ #

2.



$\therefore \overline{AB}^2=4+6-2\times2\times\sqrt6\times\frac{1}{\sqrt2}$

$=10-4\sqrt3$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{10-4\sqrt3}$ #

$\overline{CB}=2=\overline{OP}$

$\therefore \overline{CP}=\dfrac{2\times\frac12}{\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}}=\sqrt6-\sqrt2$ } $\overline{AC}=\sqrt6$

$\overline{AP}=\dfrac{2\times\frac12}{\frac{1}{\sqrt2}}=\sqrt2$

3. $f(x)=x^4-2(3a+1)x^2+7a^2+3a \Rightarrow f'(x)=4x^3-4(3a+1)x=4x(x^2-(3a+1))$

$f(x)=0$ 恰有2實根 $\Rightarrow$ — + (0) $\quad \therefore f(0)\le0 \Rightarrow 7a^2+3a\le0$

$f'(x)=0$ 恰有一實根 $\quad \Rightarrow -\frac37\le a\le0 \Rightarrow a$ 最小值 $-\frac37$ #

第二部分：綜合題(共 60 分)

一、填充題(不必詳列計算過程，請列出題號依序作答，並將答案化至最簡，全對才給分，每題 4 分，共 36 分)

1. 雙曲線Γ的中心$(1,2)$，兩漸近線為$3x+ay+1=0$及$3x+by-7=0$，又雙曲線經過點$P(3,0)$，試求：點P至兩漸近線距離的乘積為 $\underline{\frac{20}{13}}$ 。(以分數形態表示)

2. 有一條東西向的筆直公路，某甲由東往西行走，在其右側發現兩處突出的建築物A與建築物B，A在出發點O的北30°西，B在點O的北60°西，當某甲往西走2公里到達P點後，發現B在其北30°西，A在其北15°東處，試求：$\overline{AB}=$ $\underline{\sqrt{10-4\sqrt3}}$ 公里。

3. $x^4-2(3a+1)x^2+7a^2+3a=0$恰有兩實根，則實數a之最小值為 $\underline{-\frac37}$ 。

4. 設$f(x)$，$g(x)$分別為二次及三次的多項式，且滿足$(1-4x)[f(x)+x(f(x))^2]=1+x^3g(x)$，則多項式 $f(x)=$ $\underline{10x^2+3x+1}$ 。

5. a,b為實數，若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-(1+ax)}{x^2}=b$，則數對$(a，b)=$ $\underline{(\frac12,\frac38)}$ 。

6. x、y、z為正整數，且每一數為偶數之機率均為p，令$xy+z$為奇數之機率$=f(p)$，求滿足$f(p)>\frac12$之p範圍為 $\underline{\frac{2-\sqrt2}{2}<P<\frac12}$ 。

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-a^2)x^2+(1-2a)x}{x^2(\sqrt{1+x+x^2}+(1+ax))}=b$ $\quad \therefore \begin{cases} a=\frac12 \\ b=\frac38 \end{cases}$ #

4. 設 $f(x)=ax^2+bx+c$ $\quad \begin{cases} f'(x)=2ax+b \\ f''(x)=2a \end{cases}$ $\quad f(0)=c,\ f'(0)=b,\ f''(0)=2a$ $\quad \therefore$ ① $1\cdot c=1 \Rightarrow c=1$

$-4[f+x(f)^2]+(1-4x)[f'+(f)^2+2xf\cdot f']=3x^2g+x^3g' \xrightarrow{x=0} -4+(b+1)=0 \Rightarrow b=3$

$-4[f'+(f)^2+2xf'f]-4[f'+(f)^2+2xf\cdot f']+(1-4x)[f''+2ff'+2ff'+2xf'f'+2xff'']$

$=6xg+3x^2g'+3x^2g'+x^3g''$

$\xrightarrow{x=0} -4(3+1)-4(3+1)+(2a+6+6)=0 \Rightarrow a=10 \quad \therefore f(x)=10x^2+3x+1$ #

6.

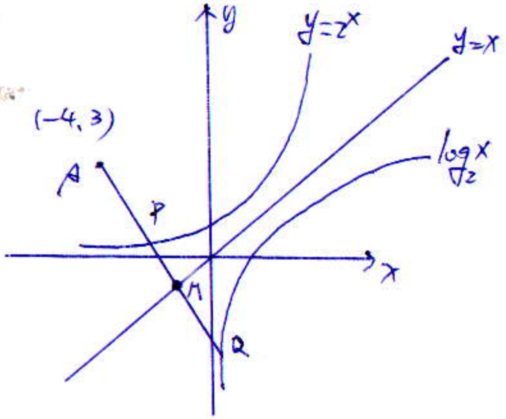
x	y	z	
+	−	−	$p(1-p)(1-p)$
−	+	−	$(1-p)p(1-p)$
−	−	+	$(1-p)^2p$
+	+	−	$p^2(1-p)$

$(2p-1)(2p^2-4p+1)>0 \rightarrow P=\dfrac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=2\pm\sqrt2$

$\Rightarrow$ 0 — + $2-\sqrt2$ $\frac12$ — 1 + $2+\sqrt2$

$\therefore 2-\sqrt2<P<\frac12$ # $(\because 0\le P\le1)$

7.



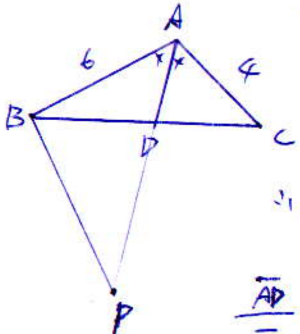
∵ $\overline{AP}+\overline{AQ}=\overline{AP}+\overline{AM}+\overline{MQ}=2\overline{PM}$

$\overline{MQ}=\overline{PM}$

∴ 最小值 $=2\times\frac{7}{\sqrt{2}}=7\sqrt{2}$

8. 看不懂!!

9. $\triangle ABP=9\triangle ABC$



∵ $\vec{AP}=t\vec{AD}$

$\vec{AD}=\frac{2}{5}\vec{AB}+\frac{3}{5}\vec{AC}$

∴ $\triangle ABD=\frac{3}{5}\triangle ABC$

$\frac{\overline{AD}}{\overline{AP}}=\frac{\frac{3}{5}}{9}=\frac{1}{15}\Rightarrow \overline{AP}=15\overline{AD}$

∴ $\vec{AP}=6\vec{AB}+9\vec{AC}\Rightarrow (x,y)=(6,9)$

7. 坐標平面上有一點 A(−4,3)，若P、Q分別為函數$y=2^x$與$y=\log_2 x$之圖形上的點，且P、Q對稱於直線y=x，則$\overline{AP}+\overline{AQ}$的最小值為 $7\sqrt{2}$ 。

8.大雄、小夫、胖虎、宜靜、小安、大仁、書豪、建民，這8人都有網路帳號，他們本來只認識其中的少數某些人，經過一段時間後調查發現，每個人都恰好認識了自己以外的5個朋友(即每個人有2個人還不認識)，請問總共有 3507 種不同的組成方式?

9.△ABC中，$\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=4$，△ABP面積＝9△ABC面積，$\overline{AD}$為△ABC的一角平分線，P在射線$\overrightarrow{AD}$上，若$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對（x，y）＝ (6，9) 。

$\begin{cases}y=2x\\ y=-x^2+3x\end{cases}\Rightarrow$ 交點(0,0)(1,2)

二、計算證明題(必須詳列出計算過程，列出題號依序作答，分段給分，每題 8 分，共 24 分)

1.求拋物線 $y=-x^2+3x$ 與兩直線 y＝x，y＝2x 所圍的區域面積＝________。

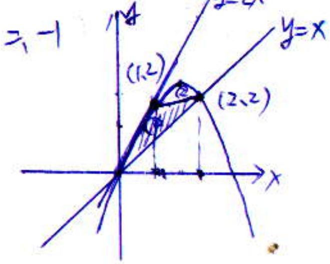
$\begin{cases}y=x\\ y=-x^2+3x\end{cases}\Rightarrow$ 交點(0,0) (2,2)

$y=-(x-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4}$

2.設$\overline{AD}$為直角△ABC之斜邊上的高，過D分別作$\overline{DE}\perp\overline{AB}$，$\overline{DF}\perp\overline{AC}$，令$\overline{BC}=a$，$\overline{BE}=x$，$\overline{CF}=y$，求證$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$。

3.設n為自然數，試以數學歸納法證明：$\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$為一自然數。

二-1

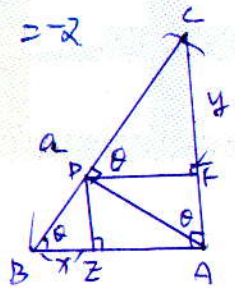


① $=\sqrt{4+4}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=1$

② $\int_1^2[(-x^2+3x)-2x]dx=\frac{1}{6}$

①+② $=\frac{7}{6}$

二-2



$\begin{cases}x=\overline{BD}\cos\theta=(\overline{AB}\cos\theta)\cos\theta=\overline{BC}\cos^3\theta=a\cos^3\theta\\ y=\overline{DC}\sin\theta=(\overline{AC}\sin\theta)\sin\theta=\overline{BC}\sin^3\theta=a\sin^3\theta\end{cases}$

∴ $\begin{cases}(\frac{x}{a})^{\frac{1}{3}}=\cos\theta\\ (\frac{y}{a})^{\frac{1}{3}}=\sin\theta\end{cases}\longrightarrow(\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}}+(\frac{y}{a})^{\frac{2}{3}}=1$

$\Rightarrow x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ ※

二-3

n=1 $\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{30}=1\in N$

設n=k時 成立, $p=\frac{6k^5+15k^4+10k^3-k}{30}\in N$

n=k+1 時

$\frac{6(k+1)^5+15(k+1)^4+10(k+1)^3-(k+1)}{30}$

$=\frac{(6k^5+15k^4+10k^3-k)+30(k^4+4k^3+6k^2+4k+1)}{30}=p+(k+1)^4\in N$ 得證

6 +15 +10 +0 −1 +0 | 1
+6 +21 +31 +31 +30
6 +21 +31 +31 +30 | +30
+6 +27 +58 +89
6 +27 +58 +89 | +119
+6 +33 +91
6 +33 +91 | +180
+6 +39
6 +39 | +130
+6
6 +45