國立清水高級中學101學年度教師甄選數學科筆試試題

第一部分：填充題(每題4分，共80分)

1. 正方體的每個面都寫上一個正整數，且相對兩面的兩個數的和都相等，如果20、49、14的對面所寫的數都是質數，依序為 a、b、c 則 $a+b+c$=_____。

2. 設u，v均為實數，則 $(5-u-\cos v)^2+(u-\sin v)^2$ 的最小值為_____。

3. 已知 $y=\log_2(11x^2+2004)$ 與 $y=3^{x^2+a}-16$ 的圖形相交於 A、B 兩點，且 $\overline{AB}=4$，則 a=_____。

4. 設空間有一質點，每一次移動的規律是由點(a，b，c)移至點(2b-c，a-b+c，2b-a)。若該質點由(6，A，B)出發，經過幾次移動後可到達點(24，-16，25)，則A+B=_____。

5. 三位以上的正整數(包含三位數)，從左而右，數字越來越小者共有_____個。

6. 設拋物線Γ：$y=x^2-ax+a$ 與x軸交於(p，0)與(q，0)兩點，其中0<p<q。已知Γ在第一象限與x軸，y軸所夾區域的面積為 α，在第四象限與x軸所夾區域的面積為 β。若 $\alpha=\beta$，則3a+q=_____。

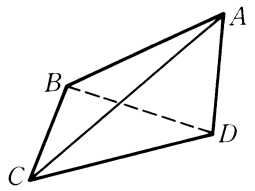
7. 一張長方形的紙 $ABCD$，沿著對角線 $\overline{AC}$ 摺起，使平面 ABC 與平面 ACD 互相直垂。若 $\overline{AB}=\sqrt{3}$，$\overline{BC}=1$，則 $\overline{BD}$=_____。

8. n是大於1的整數，坐標平面上兩橢圓區域 $\frac{x^2}{n^2}+y^2\le 1$ 和 $x^2+\frac{y^2}{n^2}\le 1$ 共同的部分以An表示，若當n趨近無限大時，An的面積趨近於a，則a之值為_____。

9. 設 L_1、L_2 為二歪斜線，L_1 上有相異三點 P、Q、R 且 $\overline{PQ}=\overline{QR}$，已知 P、Q、R 到 L_2 的距離分別為5、$3\sqrt{2}$、$\sqrt{13}$，則 L_1 與 L_2 的距離=_____。

10. 已知△ABC之內切圓切 $\overline{BC}$ 於D，若 $\overline{AB}$=4，$\overline{BC}$=6，$\overline{CA}$=5，則 $\overline{AD}$ 長為_____。

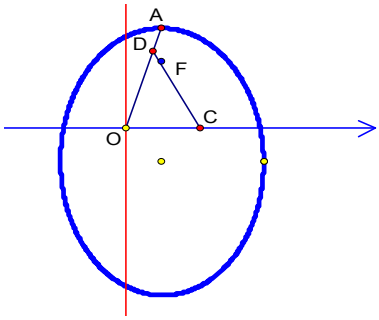
11. 如圖，四面體 A-BCD 中，$\overline{AC}=\overline{BD}=10$，$\overline{AB}=\overline{CD}=17$，$\overline{AD}=\overline{BC}=3\sqrt{29}$，則四面體 A-BCD 體積=_____。



12.已知$i=\sqrt{-1}$，$z_1=x^2-(\sqrt{x^2+4})i$，$z_2=(x^2+t)i$，對任一個實數 x 均有$|z_1|>|z_2|$，若實數 t 的範圍為$m\le t\le n$，則 2n-m=_____。

13.設兩自然數 a、b 的最小公倍數為 12600，則數對(a,b)有_____種。

14.已知 1999 為質數。S=$\{n|n為自然數且n^2-1909n+2000\ 可被\ 1999\ 整除\}$。若 a 與 b 分別為 S 中最小與次小的自然數，試求數對(a,b) =_____。



15. 如圖，A、F 分別是橢圓 $\dfrac{(y+1)^2}{16}+\dfrac{(x-1)^2}{12}=1$ 的一個頂點與一個焦點，位於 x 軸的正向的動點 $C(t,0)$ 與 F 的連線交 $\overline{OA}$ 於 D，若 $t\neq1$ 則△OCD 的面積最小值為_____。

16.已知 f(x)=$x^{1986}-x^{86}-3x^{19}-2$，若以$(x^3-2x^2+2x-1)$除 f(x)，求餘式=_____。

17. 設甲箱內有 2 白球，乙箱內有 3 紅球，現在每次自兩箱中隨機各取一球交換，若 P_i 代表有 i 個紅球在甲箱內的狀況，長期交換之後，甲箱內有 2 紅球的機率為_____。

18.令 X 和 Y 皆為均等分布於$\{0,1,2,3,\dots,N\}$的二獨立隨機變數，求 P(X≧Y)=_____。

19. 如下列表格的規則，求第 10 個表格內共 100 個奇數之總和＝_____。

1

1	3
3	1

1	3	5
3	1	3
5	3	1

1	3	5	7
3	1	3	5
5	3	1	3
7	5	3	1

20.方程式$3x^4-4x^3-12x^2+a=0$有二相異正根及二虛根，求實數 a 的範圍為_____。

第二部分：計算證明題(每題 10 分，共 20 分，請依序作答並詳列過程)

1. 坐標平面上，已知滿足不等式$log_x(10-2x+2y)<log_x(7-2x-y)$的動點 P(x，y)形成一個區域。
   (1)列出 x，y 的所有限制條件。(3 分)
   (2)在坐標平面上，畫出 P(x，y)所形成區域的圖形。(4 分)
   (3)將此區域連同邊界視為一個可行解區域，試求在該可行解區域中，4x+y 的最大值。(3 分)

2.設 T_1 , T_2 , T_3 ,…為一群多邊形，其作法如下：T_1 為邊長等於 1 的正三角形；以 T_n 每一邊中間三分之一的線段為一邊向外作正三角形，然後將該三分之一線段抹去所得的多邊形為 T_{n+1} ，n=1,2,3,… (如圖所示)，令 A_n 表示 T_n 的面積，試求 A_n 的極限值。 (10 分)

國立清水高級中學 101 學年度第一次正式教師甄選數學科筆試《答案》

第一部分：填充題(每題 4 分，共 80 分)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
70	$\frac{27-10\sqrt{2}}{2}$	-1	9	968	20	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	4
(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
3	$\sqrt{11}$	240	3	945	(1949,1959)	$\frac{4}{3}$	$-x^2-3x-1$
(17)	(18)	(19)	(20)				
$\frac{3}{10}$	$\frac{N+2}{2(N+1)}$	760	5<a<32				