教育部受託辦理 101 學年度國立高級中等學校教師甄選

數學科 試題

請注意：本試題共兩部分，選擇題 10 題及綜合題 2 大題，共計 100 分。**選擇題請用 2B軟心鉛筆在答案卡劃記，綜合題請用藍色或黑色鋼筆或原子筆在答案卷上作答。**本科不可以使用電子計算器。

第一部分：選擇題(共40分)

一、單選題：(每題4分，共28分)

(D) 1.設 $a_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$i=1,2,\cdots,9$ 為相異 9 個整數，若有 3 個 3 位數，$\overline{a_1a_2a_3}$，$\overline{a_4a_5a_6}$，$\overline{a_7a_8a_9}$ 之乘積為最大，其中 $a_1=9$，問 $\overline{a_2a_3}$ 為下列哪一數？ (A)87 (B) 81 (C) 63 (D) 41。

(C) 2.設直線 $L:\begin{cases} x+y-3z=3 \\ 2x+2y-z=1 \end{cases}$ 與球面 $S:x^2+y^2+z^2=4$ 交於 A, B 兩點，則球面 S 上 A, B 兩點間的最短路徑長為何？ (A)$\frac{\pi}{3}$ (B)$\frac{2\pi}{3}$ (C)$\frac{4\pi}{3}$ (D)$\frac{3\pi}{2}$。

(C) 3.十位考生之國文與數學成績列表如下：

考生編號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
國文	89	65	76	69	82	57	66	72	78	66
數學	75	57	65	65	83	63	58	62	63	69

今算出國文成績之標準差為 8.9 分，數學成績之標準差為 7.5 分（取至小數點第一位），則此十位考生兩科成績之相關係數最接近 (A)−0.85 (B) 0.25 (C) 0.66 (D) 0.78。

(B) 4.設 α，β，γ 為方程式 $2x^3+x^2-x-7=0$ 的三根，將 $\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\beta-1}+\frac{1}{\gamma-1}$ 之值四捨五入後可以得到下列何數？(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3。

(D) 5.若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)(1^5+2^5+\cdots\cdots+n^5)}{(1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3)(1^4+2^4+\cdots\cdots+n^4)}=\frac{b}{a}$（$a$，$b$ 為整數，且 $\frac{b}{a}$ 為一最簡分數），則 $a+b=$ (A) 37 (B) 29 (C) 22 (D) 19。

(C) 6.n 為正整數且 $n\leq 110$，則滿足 $(\sin\theta+i\cos\theta)^n=\sin n\theta+i\cos n\theta$ 之所有 n 其總和= (A)1851 (B)1750 (C)1540 (D) 2320。

(B)7.設 y=f(x)為三次函數，若(101，2012)、(103，2016)、(104，2009)、(105，2020)在函數圖形上，則 f(102)= (A) 2013 (B) 2023 (C) 2033 (D) 2043。

二、複選題 (每題4分，共12分，全對才給分，答錯不倒扣)

(AC) 8.若 $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+(1+2)}+\frac{1}{1+(1+2)+(1+2+3)}+\frac{1}{1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+4+5+\cdots\cdots+18+19+20)}=\frac{b}{a}$（$a$，$b$ 為整數，且 $\frac{b}{a}$ 為一最簡分數），則下列哪些選項為真？ (A)a 為7之倍數 (B)$b>120$ (C)$a<b$ (D)$a+b>199$。

(AD) 9.設 f（x）為一個次數不超過 3 次的實係數多項式函數，滿足 f（1）=1，f（2）=2，f（3）=3，且常數項為 a。下列哪些選項是正確的？ (A)多項式 $f(x)=\frac{-a}{6}(x-1)(x-2)(x-3)+\frac{1}{2}x(x-2)(x-3)+(-1)x(x-1)(x-3)+\frac{1}{2}x(x-1)(x-2)$ (B)可以找到實數 a，使得多項式 y=f（x）為 2 次多項式 (C)對任意大於 0 的實數 a，方程式 f（x）=0 在 1 與 2 之間一定沒有實根 (D)對任意大於 0 的實數 a，方程式 f（x）=0 在 2 與 3 之間一定沒有實根。

(ABCD) 10.設n是大於1的整數，坐標平面上兩個橢圓區域 $\frac{x^2}{n^2}+y^2\leq 1$ 和 $x^2+\frac{y^2}{n^2}\leq 1$，共同的部分以$A_n$表示，請選出正確的選項 (A)$A_n$的面積小於4 (B)$A_n$的面積大於π (C)$A_n$的周長大於5 (D)當$n$趨於無窮大時，$A_n$的面積趨近於4。

第二部分：綜合題(共 60 分)

一、填充題(不必詳列計算過程，請列出題號依序作答，並將答案化至最簡，全對才給分，每題 4 分，共 36 分)

1.雙曲線Γ的中心$(1,2)$，兩漸近線為$3x+ay+1=0$及$3x+by-7=0$，又雙曲線經過點$P(3,0)$，試求：點P至兩漸近線距離的乘積為$\underline{\dfrac{20}{13}}$。(以分數形態表示)

2.有一條東西向的筆直公路，某甲由東往西行走，在其右側發現兩處突出的建築物A與建築物B，A在出發點O的北30°西，B在點O的北60°西，當某甲往西走2公里到達P點後，發現B在其北30°西，A在其北15°東處，試求：$\overline{AB}=\underline{\sqrt{10-4\sqrt{3}}}$公里。

3.$x^4-2(3a+1)x^2+7a^2+3a=0$恰有兩實根，則實數a之最小值為$\underline{-\dfrac{3}{7}}$。

4.設$f(x)$，$g(x)$分別為二次及三次的多項式，且滿足$(1-4x)[f(x)+x(f(x))^2]=1+x^3g(x)$，則多項式$f(x)=\underline{10x^2+3x+1}$。

5.a,b為實數，若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-(1+ax)}{x^2}=b$，則數對（$a$，$b$）=$\underline{(\frac{1}{2},\frac{3}{8})}$。

6. x、y、z為正整數，且每一數為偶數之機率均為p，令$xy+z$為奇數之機率$=f(p)$，求滿足$f(p)>\dfrac{1}{2}$之p範圍為$=\underline{\frac{2-\sqrt{2}}{2}<P<\frac{1}{2}}$。

7. 坐標平面上有一點 A（$-4,3$），若P、Q分別為函數$y=2^x$與$y=\log_2 x$之圖形上的點，且P、Q對稱於直線$y=x$，則$\overline{AP}+\overline{AQ}$的最小值為$\underline{7\sqrt{2}}$。

8.大雄、小夫、胖虎、宜靜、小安、大仁、書豪、建民，這8人都有網路帳號，他們本來只認識其中的少數某些人，經過一段時間後調查發現，每個人都恰好認識了自己以外的5個朋友(即每個人有2個人還不認識)，請問總共有$\underline{3507}$種不同的組成方式?

9.△ABC中，$\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=4$，△ABP面積＝9△ABC面積，$\overline{AD}$為△ABC的一角平分線，P在射線$\overrightarrow{AD}$上，若$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對（x，y）＝$\underline{（6，9）}$。

二、計算證明題(必須詳列出計算過程，列出題號依序作答，分段給分，每題 8 分，共 24 分)

1.求拋物線 $y=-x^2+3x$ 與兩直線 $y=x$，$y=2x$ 所圍的區域面積=_________。

2.設$\overline{AD}$為直角△ABC之斜邊上的高，過D分別作$\overline{DE}\perp\overline{AB}$，$\overline{DF}\perp\overline{AC}$，令$\overline{BC}=a$，$\overline{BE}=x$，$\overline{CF}=y$，求證$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$。

3.設n為自然數，試以數學歸納法證明：$\dfrac{n^5}{5}+\dfrac{n^4}{2}+\dfrac{n^3}{3}-\dfrac{n}{30}$為一自然數。