

國立竹北高中 101 學年度第 1 學期第 1 次教師甄選 數學 科試題

一、填充題(1-6 題每題 8 分，第 7 題每小題 6 分，共 60 分)

1. 設圓  $C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$  及球面  $S: (x-4)^2 + (y-3)^2 + (z-8)^2 = 16$ ，若  $P \in C$  且  $Q \in S$ ，則

$\overline{PQ}$  的範圍為何？

2. 正立方體的 8 個頂點、12 條稜邊的中點、6 個面的中心點及正立方體的中心點，合計 27 個點，則此 27 個點最多可畫出幾條相異的直線？

3. 設曲線  $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ ，點  $P(0, a)$  在曲線之外， $a \in R$ ，若過點  $P$  的切線可以有相異的三條時，則  $a$  的範圍為何？

4. 設  $\triangle ABC$  之三邊長為  $\overline{AB} = 3$ ,  $\overline{AC} = 4$ ,  $\overline{BC} = 5$ ，一質點由  $A$  點出發，射向  $\overline{BC}$  邊上一點 (此點不在端點上)，若此質點經過二次反射後到達  $B$  點，則此質點所經過的路徑長為何？

5. 平面上由上而下依序劃三條相異的平行線，其中第一條與第二條、第二條與第三條的距離分別為  $d_1$ ,  $d_2$ 。若在三條直線上各取一點，使它們構成一個正三角形，則此正三角形的邊長為何？

6. 長軸長為 12 之橢圓， $F$  為其中一個焦點， $\overline{PQ}$  為過  $F$  之焦弦，若  $\overline{PF} = 5$  且  $\overline{QF} = 3$ ，則其正焦弦長為何？

7. (1)  $f$  為線性變換，將平面上每一點  $P$  沿  $x$  軸推移  $y$  座標之  $k$  倍得另一點  $P'$ ，求  $f$  之矩陣表示。

- (2) 設曲線  $C: x^2 + 4xy + 5y^2 = 9$ ，經  $f$  之推移後得曲線  $C'$ ， $C'$  方程式形如  $ax^2 + by^2 = 9$

求數對  $(a, b) = ?$

二、計算題(每題 10 分，共 40 分)

1. 設  $f(x)$  是一個 2010 次實係數多項式，滿足  $f(k) = -\frac{1}{k}$ ，其中  $k = 1, 2, \dots, 2011$ ，

求  $f(2012) = ?$

2. 一直圓錐體的內部能放進一個半徑為 1 的球體，求此直圓錐體的最小體積。

3. 某人同時擁有 Apple 與 BenQ 的智慧型手機各一支，為了怕遺失，被人盜打，每天都更換手機的開機密碼，而更換的原則為：

A 機密碼 =  $2 \times (\text{昨日 A 機密碼}) - 3 \times (\text{昨日 B 機密碼})$ ；

B 機密碼 =  $(\text{昨日 A 機密碼}) - (\text{昨日 B 機密碼})$ 。

已知第 1000 天，此人的 A 手機密碼為 -3，B 手機密碼為 -8，求此人第一天所使用的 A 手機與 B 手機的密碼各為何？

4.  $a, b \in R$ ， $f(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ 。若方程式  $f(x) = 0$  在開區間  $[-2, -1]$ ， $[-1, 1]$ ， $[1, 2]$  範圍內

各有一實根，求  $\int_0^1 f(x) dx$  之最大值與最小值。