

2008 年青少年數學國際城市邀請賽  
高雄市參賽代表遴選初賽  
個人競賽試題

編號:\_\_\_\_\_校名:\_\_\_\_\_國中 姓名:\_\_\_\_\_

作答時間: 二 小時

**第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分**

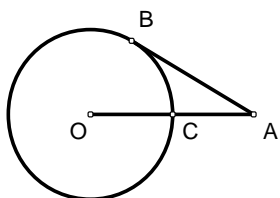
(注意：請將答案直接填入各題預留空白處，不須列出計算過程)

1. 如果一個三位數其個位數上的數字與十位數上的數字之乘積等於百位數上的數字，則稱此三位數為「友誼數」；那麼在 100 到 999 之間「友誼數」個數為\_\_\_\_\_。
2. 設  $N$  為一正整數，若 73、111、169 同除以  $N$  後，所得到的三個餘數的和為 35，則  $N =$ \_\_\_\_\_。
3. 設  $x, y, z$  為三正整數，它們為偶數或奇數的機率均為  $1/2$ ，則  $xy + yz$  成為偶數的機率為\_\_\_\_\_。
4. 設三正數  $a, b, c$  滿足  $abc = 10$ ，則  $(a + b)(b + c)(c + a)$  的最小值為\_\_\_\_\_。
5. 若凸  $n$  邊形的  $n$  個內角與某一個外角總和為  $1350^\circ$ ，則  $n$  等於\_\_\_\_\_。
6. 從 1 到 200 這些正整數中，可表示成二個不同的非負整數（即包含 0）之平方和的數共有\_\_\_\_\_個。
7. 已知兩個正整數之和比它們的乘積小，若其中一個數是完全平方數，則較大數與較小數的比值為\_\_\_\_\_。
8. 設  $\alpha, \beta$  為正整數，且  $\frac{52}{303} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{16}{91}$ ，當  $\beta$  有最小值時，則  $\frac{\alpha}{\beta}$  的值為\_\_\_\_\_。
9. 已知  $a \neq b$  且滿足  $a^2 + 4a + 1 = 0, b^2 + 4b + 1 = 0$ ，則  $\left(\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1}\right)^3 =$ \_\_\_\_\_。
10. 六位數  $\overline{a2008b}$  可被 99 整除，則  $a \times b$  之值為\_\_\_\_\_。

（翻面繼續作答）

11. 有一個九位數  $abcdefghi$  的各位數字都不相同且全都不為 0，並且二位數  $ab$  可被 2 整除，三位數  $abc$  可被 3 整除，四位數  $abcd$  可被 4 整除， $\dots$ ，依此類推，九位數  $abcdefghi$  可被 9 整除。則這個九位數  $abcdefghi$  為\_\_\_\_\_。

12. 如圖， $\overline{AB}$  切圓  $O$  於  $B$  點，且  $\overline{OA}$  交圓  $O$  於  $C$  點。若  $\overline{AB} = \sqrt{5}$ ， $\overline{CA} = 1$ ，則圓  $O$  的半徑為\_\_\_\_\_。

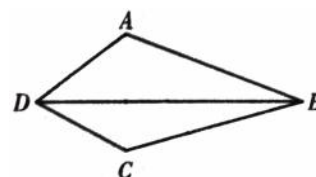


## 第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在本試卷正反面空白處依題號作答，須詳列計算過程及說明理由)

1. 如右圖，在四邊形  $ABCD$  中， $\angle ABC = 30^\circ$ ， $\angle ADC = 60^\circ$ ， $\overline{AD} = \overline{CD}$

求證： $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$



(翻面繼續作答)

2. 設  $a, b$  為整數，試求滿足  $a + b$  為方程式  $x^2 + ax + b = 0$  之一解的所有可能值  $(a, b)$ 。

(翻面繼續作答)

3. 設  $f(n)$  定義在正整數集合上，並且

(1) 當  $n \geq 1000$  時， $f(n) = n - 3$ ；

(2) 當  $n < 1000$  時， $f(n) = f(f(n+7))$ ，

試求  $f(97)$  之值。