

2008 年青少年數學國際城市邀請賽  
高雄市參賽代表遴選初賽  
個人競賽試題參考解答

編號:\_\_\_\_\_校名:\_\_\_\_\_國中 姓名:\_\_\_\_\_

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請將答案直接填入各題預留空白處，不須列出計算過程)

1. \_\_\_\_\_23\_\_\_\_\_ 7. \_\_\_\_\_18\_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_53\_\_\_\_\_ 8.  $\frac{4}{23}$

3.  $\frac{3}{4}$  9. \_\_\_\_\_-1\_\_\_\_\_

4. \_\_\_\_\_80\_\_\_\_\_ 10. \_\_\_\_\_7\_\_\_\_\_

5. \_\_\_\_\_9\_\_\_\_\_ 11. \_\_\_\_\_381654729\_\_\_\_\_

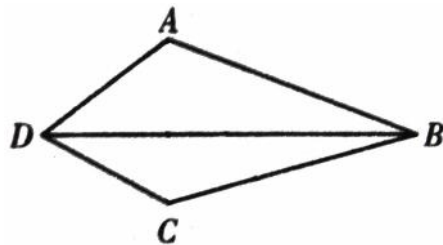
6. \_\_\_\_\_81\_\_\_\_\_ 12. \_\_\_\_\_2\_\_\_\_\_

## 第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在本試卷正反面空白處依題號作答，須詳列計算過程及說明理由)

1. 如右圖，在四邊形  $ABCD$  中， $\angle ABC = 30^\circ$ ， $\angle ADC = 60^\circ$ ， $\overline{AD} = \overline{CD}$

求證： $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$

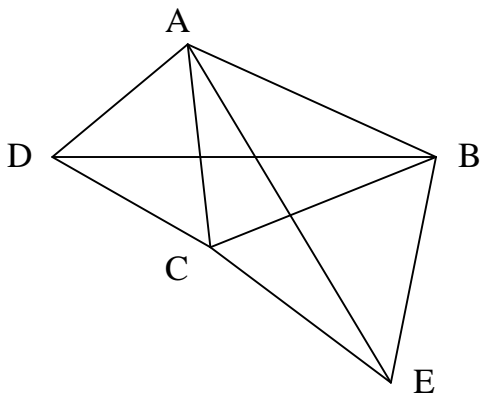


【參考解答】：

連  $\overline{AC}$  (如下圖)，以  $\overline{BC}$  為邊角向外作正  $\triangle BCE$ ，連  $\overline{BE}$

則可証得  $\triangle DCB \cong \triangle ACE$  (SAS)  $\therefore \overline{DB} = \overline{AE}$ ,  $\overline{BC} = \overline{BE}$

$$\therefore \angle ABE = 90^\circ \quad \therefore \overline{BD}^2 = \overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$



2. 設  $a, b$  為整數，試求滿足  $a+b$  為方程式  $x^2 + ax + b = 0$  之一解的所有可能值  $(a, b)$ 。

【參考解答】：

$$\therefore (a+b)^2 + a(a+b) + b = 0, \quad \therefore b^2 + (3a+1)b + 2a^2 = 0 \text{ 爲 } b \text{ 的一元二次方程式}$$

利用判別式，得到判別式必為完全平方數， $\therefore a = -6$  或  $0$ 。

故  $(a, b) = (-6, 8), (-6, 9), (0, 0), (0, -1)$ 。

求得所有可能  $(a, b) = (-6, 8), (-6, 9), (0, 0), (0, -1)$  共四組解。

3. 設  $f(n)$  定義在正整數集合上，並且
- (1) 當  $n \geq 1000$  時， $f(n) = n - 3$ ;
  - (2) 當  $n < 1000$  時， $f(n) = f(f(n+7))$ ，
- 試求  $f(97)$  之值。

【參考解答】：

令  $f_m(x) = \underbrace{f(f(\dots(x)))}_{m\text{個}}$ ，由  $1000 = 97 + 7 \times 129$

得  $f(97) = f(\underbrace{f(f(104)))}_{m\text{個}}) = f_2(104) = f_3(111) = \dots = f_{130}(1000)$

而  $f(1000) = 997$

$$f(999) = f(f(1006)) = f(1003) = 1000$$

$$f(998) = f(f(1005)) = f(1002) = 999$$

$$f(997) = f(f(1004)) = f(1001) = 998$$

因此， $f_m(1000)$  的值一直在 997, 998, 999，以及 1000 之間循環出現，

並以 4 為週期，而  $130 \div 4 = 32$  餘 2；

所以， $f(97) = f_{130}(1000) = f_2(1000) = f(f(1000)) = f(997) = 998$ ，

所求  $f(97)$  之值為 998。