

國立中壢高級中學 101 學年度第 1 次教師甄選 數學科筆試題目卷

說明：

一、試題包含填充 10 題，每題配分 7 分。計算 3 題，每題配分 10 分。

二、填充題寫在答案卷第 1 頁(不需計算過程)

依

1. _____ 2. _____ 3. _____ 4. _____ 5. _____
6. _____ 7. _____ 8. _____ 9. _____ 10. _____

方式自行劃格填入答案，否則不予計分。

三、計算第 1 題，請寫在答案卷第 2 頁；

計算第 2 題，請寫在答案卷第 3 頁；

計算第 3 題，請寫在答案卷第 4 頁。

四、答案卷第 5 頁、第 6 頁為計算用紙。

五、答案卷務必使用黑色或藍色墨水的筆作答，否則不予計分。

一、填充題：每題 7 分，共 70 分。

1. 已知二階方陣 $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ， a, b, c, d 均為非零整數，若 P 點為圓 $C: x^2 + y^2 = 1$ 上之任一點，且 P 點經過 M 作變換後所對

應之點 P' 均落在直線 $L: y = 2x$ 上，試求 $\frac{c}{a} + \frac{b}{d} =$ _____。

2. 將 7 個可能是 1 或 -1 的數排成一列，要求由左至右逐項加總時，其和都不可以出現負值，例如 1、-1、1、1、-1、-1、1 其連續逐項加總之和分別為 1、0、1、2、1、0、1 是符合要求的，而 1、1、-1、-1、-1、1、1 其連續逐項加總之和分別為 1、2、1、0、-1、0、1 則不符合要求，則有 _____ 種符合要求的排法。

3. 若雙曲線 $xy = 1$ ，有一正 $\triangle PQR$ 三頂點位於此雙曲線上，已知其中一頂點 $P(-1, -1)$ ，試求 $\triangle PQR$ 面積為 _____。

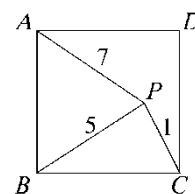
4. 設 $f(x)$ 的函數值皆為正數且為可微分函數，若對任意實數 x, y 恆滿足：

$f(x+y) = 2f(x)f(y)$ ，且 $f'(0) = 2$ ，則 $\frac{f'(x)}{f(x)} =$ _____。

5. 設 $A(2, 0)$ 為平面上一定點， $P(\sin(2t - 45^\circ), \cos(2t - 45^\circ))$ 為動點，則當 t 由 15° 變為 30° 時，線段 \overline{AP} 所掃過的圖形的面積為 _____。

6. 8 人排成一列，求甲乙丙任兩人不相鄰，且丁戊不相鄰，且己庚不相鄰的排法有 _____ 種。

7. 如右圖，已知 P 為正方形 $\square ABCD$ 內部的一點，若 $\overline{AP} = 7$ ， $\overline{BP} = 5$ ， $\overline{CP} = 1$ ，則 $\square ABCD$ 的面積為 _____。



8. 在 $\triangle ABC$ 中， $\sin A + \sin C = 2\sin B$ ， $\angle A - \angle C = \frac{\pi}{3}$ ，則 $\sin B =$ _____。

9. 在直角 $\triangle ABC$ ， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = c$ 。沿向量 \overrightarrow{AB} 的方向，依序點 M_1, M_2, \dots, M_{n-1} 將線段 \overline{AB} 分成了 n 等份，

則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CM_1} + \overrightarrow{CM_1} \cdot \overrightarrow{CM_2} + \dots + \overrightarrow{CM_{n-1}} \cdot \overrightarrow{CB}) =$ _____。

10. 設 a, b, k 都是正實數，一個以點 (a, b) 為圓心的過原點 $(0, 0)$ 的圓與拋物線 $y = kx^2$ 有異於原點的另外兩個交點，此二交點落在直線 $y = kx + b$ 上，則 b 的最小值為 _____。

二、計算題：每題 10 分，共 30 分。

1. 平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ，滿足 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$ ，設 $\vec{u} = \vec{a} - \vec{c}, \vec{v} = \vec{b} - \vec{c}$ ，且 \vec{u} 與 \vec{v} 夾角為 60° ，則 $|\vec{c}|$ 的最大值為何？
2. 試求最小正整數 k 使得方程式 $\left\lfloor \frac{2012}{n} \right\rfloor = k$ 中的 n 沒有整數解。（ $[x]$:表高斯函數）
3. 如右圖，在空間中有三邊是 6, 8, 10 的三角形薄板，試求與此板的最短距離不超過 2 的所有點組成的立體的體積。

