

填充題：一題六分，共 10 題

1. 試求下列極限 (i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$  (ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

2. 解不等式  $\log_{14}(x^3 - 5x + 12) > 1$

3. 設無窮級數  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3^k} + \frac{1}{2^k}\right) = A$  ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k(k+2)} = B$  , 求  $A+B$

4. 直線  $y=x+k$  與橢圓  $9x^2+y^2=18$  相交於相異兩點，求  $k$  的範圍

5. 求級數和  $\left[\frac{1^3}{2}\right] + \left[\frac{2^3}{3}\right] + \left[\frac{3^3}{4}\right] + \dots + \left[\frac{99^3}{100}\right] + \left[\frac{100^3}{101}\right]$  , 其中  $[\ ]$  為高斯記號

6.  $k \in \mathbb{Z}$  , 多項式  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-k) + 124$  有整係數一次因式，求  $k$

7. 將相同的 20 顆紅球，20 顆黑球，20 顆白球，各自分成 30 顆球的兩堆，分法有幾

8. 桌上放了一個稜長為 4 單位的正四面體 ABCD，BCD 為接觸桌面的三個頂點，今以 BC 線段為軸將 D 點抬離桌面 2 單位，問 A 點與桌面的距離為幾單位

9. 設  $S = \{1, 2, 3, 4, \dots, 200\}$  將  $S$  中凡是可被 2 整除的數字乘上  $(-1)$ ，接著凡是可被 3 整除的數字乘上  $(-1)$ ，最後凡是可被 5 整除的數字乘上  $(-1)$ ，經過三次修改後， $S$  中的所有數字總和為何

10. 雙曲線的中心點在原點，兩個焦點皆在  $x$  軸上，有一條斜率為  $\sqrt{\frac{3}{5}}$  的直線通過右焦點並且交雙曲線於  $P, Q$  兩點，已知  $\overline{OP}$  垂直於  $\overline{OQ}$  且  $\overline{PQ} = 4$ ，求雙曲線方程式

計算題：一題 10 分，共四題

1. 設  $A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ， $O$  為三階零矩陣，是否存在非零方陣  $X, Y$  使得  $AX=O, BY=O$ ，如果存在請舉例，不存在請證明之

2.  $x, y$  皆為實數，滿足  $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 2(y^4 - x^4) \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{2y} = (x^2 + 3y^2)(3x^2 + y^2) \end{cases}$ ，求  $(x, y)$

3. 箱子中有七顆球，編號分別為 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7，每次任取一顆球，取後放回，設  $S_n$  為取出  $n$  次球編號的總和，令  $P_n$  為  $S_n = 4k + 1$ ， $k \in \mathbb{Z}$  的機率，試求
- $P_1, P_2$  各為何。
  - 利用  $P_n$  推出  $P_{n+1}$  的遞迴關係式
  - $P_n$  為

4. 試求有多少相異的多項式  $f(x) = x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$

- 滿足 (1)  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  之中的七個相異正整數  
(2)  $f(x)$  能被  $x^3 + x^2 + x + 1$  整除