

# 教育部九十七學年度高級中學數學競賽

## 台中區複賽試題（一）

編號：\_\_\_\_\_

（學生自填）

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共四題**計算證明題**，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

---

一、正實數  $x, y$  滿足  $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$ 。試證  $x^3 + y^3 \leq 2$ 。(12 分)

二、用 0, 1, 2 組成字串，但相鄰的三個位置不得出現 '0, 1, 2'（按此順序）。令  $a_n$  為滿足上述條件且長度為  $n$  的字串個數。試求出  $a_n$  為 6 的倍數的充要條件。(12 分)

三、設  $k$  是滿足下列條件的最小正整數：有 5 個不同整數  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$  使得多項式  $P(x) = (x - m_1)(x - m_2)(x - m_3)(x - m_4)(x - m_5)$  恰有  $k$  個不為零的係數。試找出  $k$  的值及一組相應於  $k$  的  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$  之值。(12 分)

四、 $\triangle ABC$  為一三角形。過  $A$  及  $B$  作一圓交  $BC$  內一點  $D$ ，過  $C$  及  $B$  作一圓交  $AB$  內一點  $E$ ，這兩圓交於  $B$  及另一點  $F$ 。若  $A, E, D, C$  都在以  $O$  為圓心的圓上，試證：

(1)  $AD, BF, CE$  共點；

(2)  $\angle BFO$  為直角。(13 分)

# 教育部九十七學年度高級中學數學競賽

## 台中區複賽試題（二）

編號：\_\_\_\_\_

（學生自填）

（時間一小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題**填充題**，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

---

一、半徑為 1 的小圓與半徑為 35 的大圓外切於 A 點，線段  $\overline{BC}$  分別切小圓與大圓於 B 點與 C 點。求  $\overline{AC}$  的長度。(4 分)

二、已知一三角形的三高長為  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{7}$ 。求其三邊長。(4 分)

三、某特徵（如拇指是否可彎曲）是根據一對基因來分類的，若 A, a 分別代表顯性及隱性基因，則某人有 AA 之基因稱為純顯型，Aa（同於 aA）稱為混合型，aa 稱為純隱形。外觀上，Aa 和 AA 是有這個特徵的。孩子從父母各得一因子。假設 AA, Aa, aa 之人口比例分別為 1/4, 1/2, 1/4，且婚配與否和此特徵無關。

(a) 有一對夫妻皆為混合型，若他們有 4 個小孩，求其中 3 個小孩具顯性特徵之機率。

(b) 有一對夫妻他們 4 個小孩中有 3 個具顯性特徵，求此對夫妻皆為混合型之機率。(5 分)

四、一餐廳提供十二道小菜給每一位客人。今有四位客人，每一道小菜皆有其中一人點選上，但四人不會同時點選同一道小菜，那麼這四人可能的點選組合共有多少種？(4 分)

五、令  $f_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k 2^{2n-2k} C_k^{2n-k+1}$ ，求  $f_{100}$ 。(4 分)