

教育部九十七學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（一）【解答】

一、【解】

若 $x > 1, y > 1$ ，則 $x^2 + y^3 < x^3 + y^4$ 。又若 $x \leq 1, y \leq 1$ ， $x^3 + y^3 \leq 2$ 。

若 $x > 1, y < 1$ ，因 $x + \frac{1}{x} \geq 2, y + \frac{1}{y} \geq 2$ ，得 $y^n \left(\frac{1}{y} - 1 \right) \geq y^n (1 - y)$ ，

$x^n (x - 1) \geq x^n \left(1 - \frac{1}{x} \right)$ 。因此，

$$1 - y \geq y - y^2 \geq y^2 - y^3 \geq y^3 - y^4 \geq x^3 - x^2 \geq x^2 - x \geq x - 1。$$

故 $2 \geq x + y \geq x^2 + y^2 \geq x^3 + y^3$ 。

情形 $x < 1, y > 1$ 也如此處理。

二、【解】

設第一個數為 1，則共有 a_{n-1} 個字串。設第一個數碼為 2，則共有 a_{n-1} 個字串。

若第一個數碼為 0，則共有 $a_{n-1} - a_{n-3}$ 個字串（減去的一項為開頭為 012 的字串）。因此長度為 n 的字串共有

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-3}) = 3a_{n-1} - a_{n-3}$$

個。又 $a_1 = 3, a_2 = 9, a_3 = 26$ ，由數學歸納法易得， a_n 為 3 的倍數的充要條件為

$$n \equiv 1, 2 \pmod{3}.$$

$a_n, n = 1, 2, \dots$ 除以 2 的餘數為：

1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, \dots

是週期長為 7 的循環，而 a_n 為偶數的充要條件為 $n \equiv 3, 5, 6 \pmod{7}$ 。

因此 a_n 為 6 的倍數的充要條件為

$$n \equiv 5, 10, 13, 17, 19, 20 \pmod{21}。$$

三、【解】

(1) $k = 1$ 時， $P(x) = x^5$ ，但不合條件（5 個不同 m_1, \dots, m_5 ）

(2) $k = 2$ 時， $P(x) = x^5 + ax^r$ ，其中 $a \in \mathbb{Z}, 0 \leq r \leq 4$ 。

但若 $r \geq 2$ ，則 m_i 's 中至少有二個零；若 $r = 0$ 或 1 時，則 $P(x)$ 至少有一

非實根，即 m_i 's 中至少有一複數。

$\therefore k \geq 3$. 而且由 $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 得

$$\begin{aligned} P(x) &= x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) \\ &= x(x^2-1)(x^2-4) = x^5 - 5x^3 + 4x. \end{aligned}$$

$\therefore k = 3$.

四、【解】

設 AD, CE 交於 P ，如圖 BP 延線交圓於 S 及 T 。過 D 作直線平行 BP ，交圓於另一點 R 。弦 ST 與 ER 交於 M 。則

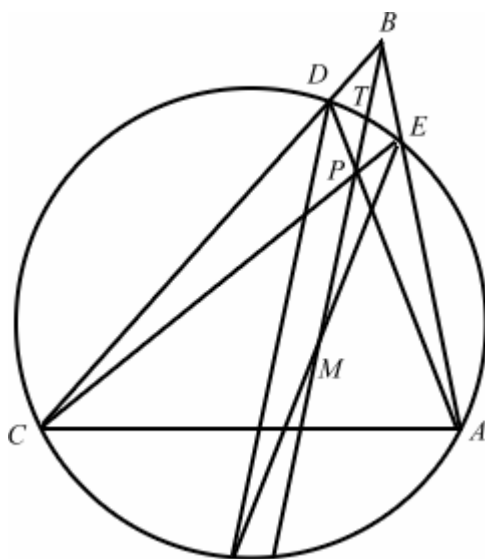
$$\angle DCE = \angle DRE = \angle DAE。$$

因 $DR \parallel BS$ ， $\angle DRE = \angle RMS = \angle BME$ 。得 $\angle DCE = \angle BME = \angle DAE$ ， B, C, M, E 及 P, M, E, A 共圓。因 B, C, M, E 共圓，

$$BP \cdot PM = CP \cdot PE = AP \cdot PD，$$

且 B, D, M, A 共圓。因此 M 就是 F 。

因 $DR \parallel BS$ ， $\angle RDM = \angle DMB = \angle DAB = \angle DRE$ ，故 $DM = RM$ 。因此過 M 至 DR 之垂線通過 O ，且 OM 與 DR 及 TS 垂直。故得證。



	<i>Aa</i>	<i>Aa</i>	<i>AA</i>
<i>aa</i>	<i>Aa</i>	<i>Aa</i> <i>aa</i>	<i>Aa</i>
<i>Aa</i>		<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"><i>AA</i> <i>Aa</i> <i>Aa</i></div>	<i>AA</i> <i>Aa</i>
<i>AA</i>			<i>AA</i>

$$\begin{aligned}
 P(Aa \times Aa \mid K_3^4) &= \frac{P(K_3^4 \cap Aa \times Aa)}{P(K_3^4)} \\
 &= \frac{P(K_3^4 \cap Aa \times Aa)P(Aa \times Aa)}{P(K_3^4 \mid Aa \times Aa)P(Aa \times Aa) + P(K_3^4 \mid Aa \times aa)P(Aa \times aa)} \\
 &= \frac{\frac{27}{64} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{27}{64} \cdot \frac{1}{4} + C_3^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2} = \frac{\frac{27}{64 \cdot 4}}{\frac{27}{64 \cdot 4} + \frac{16}{64 \cdot 4}} = \frac{27}{43}.
 \end{aligned}$$

四、【解】

這四個人選擇某一道小菜的方式有 $2^4 - 2 = 14$ 種（扣除掉各人都選及各人都不選這兩種情形），故可能方式共 $14^2 = 2^{12} 7^{12}$ 。

五、【解】

$$\text{令 } f_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k 2^{2n-2k} \binom{2n-k+1}{k}$$

$$f_0 = 1, f_1 = 2, f_2 = 3, \dots$$

$$\therefore f_n = n + 1$$

$$\therefore f_{100} = 100 + 1 = 101$$

$$\text{事實上 } f_n = 2f_{n-1} - f_{n-2}. \text{ 令 } g_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k 2^{2n-2k} \binom{2n-k}{k}$$

$$\text{使用等式 } \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

$$\text{得 } g_{n+1} = 4f_n - g_n \quad (1)$$

$$f_{n+1} = g_{n+1} - f_n \quad (2)$$

$$\text{由 (2) 得 } g_{n+1} = f_{n+1} + f_n$$

代回 (1) 得

$$f_{n+1} + f_n = 4f_n - (f_n + f_{n-1})$$

$$f_{n+1} = 2f_n - f_{n-1}.$$