國立臺灣師大附中 101 學年度教師甄試 數學科試題

一. 填充題 (每題 6 分，共 36 分)

1. 已知直線 L 過點 $P(-2,1,2)$ 且與兩條直線 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$ 及 $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{1}$ 都相交，則 L 的方程式爲 ____________。 (以對稱比例式表示)

2. 設 D 爲 $\triangle ABC$ 內一點使得 $\angle ACD=\angle ABD$，且 $\angle ADB=90°$， M 爲 $\overline{BC}$ 的中點。已知 $\overline{AB}=12$， $\overline{AC}=8$ ，則 $\overline{DM}=$ ____________。

3. 設函數 $f(x)$ 在區間 $[0,1]$ 上連續，已知 $\int_0^1 f(x)dx=k$，則 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$ 的積分值爲 ____________。 (以 k 表示)

4. 設曲線 C 由 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{10}=1\ (y\geq 0)$ 與 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{10}=1\ (y\geq 0)$ 所組成，若直線 L 過點 $(0,3)$ 且與曲線 C 恰相交於 2 點，則直線 L 的斜率範圍爲 ____________。

5. 若 a 是下列同餘方程組

$$\begin{cases} x & \equiv 1 \pmod 2 \\ x & \equiv 2 \pmod 3 \\ x & \equiv 1 \pmod 5 \\ x & \equiv 5 \pmod 7 \\ x & \equiv 2 \pmod 9 \end{cases}$$

的最小正整數解，則 $a=$ ____________。

6. 設 R^3 中直線 L 過 $(0,0,0)$ 及 $(1,-1,1)$ 兩點，且 T 是以直線 L 爲軸，逆時針旋轉 $\frac{2\pi}{3}$ 的變換 (從向量 $(1,-1,1)$ 的端點 $(1,-1,1)$ 往原點的方向看)，則向量 $(1,2,3)$ 經過此旋轉變換後所得的向量爲 ____________。

二. 計算證明題 (除第 3 題兩小題各 5 分外，其它每題 9 分，共 64 分)

1. $a > 0, b > 0, \theta$ 銳角，求 $\frac{a}{\cos\theta} + \frac{b}{\sin\theta}$ 的最小值。

2. $\triangle ABC$ 中， G 爲重心。直線 L 過 G 與 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 分別交於 M 和 N。$\overline{BM} = p\overline{BA}, \overline{BN} = q\overline{BC}$，求 pq 最小值。

3. $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$, for $n \geq 1$。

   (1) 證明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在。

   (2) 證明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$ 收斂。

4. $A_{n\times n} = [a_{ij}], B_{n\times n} = [b_{ij}]$，其中 $b_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} - a_{ij}$。$\det A = a$, 求 $\det B$ (以 a 表示)。

5. 求 $\sum\limits_{n=1}^{10}\left[\frac{x}{n!}\right] = 2012$ 的所有正整數解。

6. 求兩小於 1 的正數，其和小於 1，其積小於 $\frac{2}{9}$ 的機率。

7. $P(a,b)$ 在 $x^2+y^2=5$ 上，求滿足 $\log_2(b-a) - \log_8(3b-5a) = 0$ 的所有點 P。

以下為略解:

一. 填充題

1. 兩直線稱作 L_1, L_2。做過 L_2 和 P 之平面與 L_1 交於 Q 點, $\overleftrightarrow{PQ}$ 即為所求。
2. 做 $\triangle ABD$ 的外接圓，其圓心為 E，將此圓對 $\overline{AD}$ 作對稱。
   以 $'$表示之，則 D 為 $\overline{BB'}$ 中點，又 M 為 $\overline{BC}$ 中點，
   由 $\angle ABD = \angle ACD$ 可知 C 在圓上。
   所以 $\overline{DM} = \frac{1}{2}\overline{B'C} = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 - 8^2} = 2\sqrt{5}$。
3. $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy = \int_0^1 dy \int_0^y f(x)f(y)dx = \int_0^1 dx \int_0^x f(y)f(x)dy$，
   頭尾相加除 2 得 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)dy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^1 f(x)f(y)dy = \frac{k^2}{2}$。
4. 畫圖，注意漸近線和端點。
5. 令 $x = (\frac{a}{2} + \frac{b}{5} + \frac{c}{7} + \frac{d}{9}) \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$，可得 $(a, b, c, d) = (1, 1, 2, -1)$。
   得 $x = 315 + 126 + 180 - 70 = 551$。
6. 注意平面 $x - y + z = 1$ 與坐標軸交於 $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$ 恰為一正三角形。此旋轉即是將三個頂點互換，因此 $(1, 2, 3)$ 轉後為 $(-2, -3, 1)$。

二. 計算證明題

1. 解 1.廣義柯西不等式。
   解 2.應觀衆要求，不能使用廣義柯西，(其實先偷用才知道要放 $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$ 的)

$$
\begin{aligned}
&\left[(\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\frac{a}{\cos\theta} + \frac{b}{\sin\theta})\right]\left[(\frac{a}{\cos\theta} + \frac{b}{\sin\theta})(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})\right] \\
\geq &(\sqrt{a\cos\theta} + \sqrt{b\cos\theta})^2(\frac{a^{\frac{5}{6}}}{\sqrt{\cos x}} + \frac{b^{\frac{5}{6}}}{\sqrt{\sin x}})^2 \\
\geq &(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^4.
\end{aligned}
$$

   等號成立全部都是 $\cos^2\theta = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}$, $\sin^2\theta = \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}$。
   解 3. ϕ 銳角待定 $\cos(\theta - \phi) = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi \leq 1$。則

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{\cos\theta} + \frac{b}{\sin\theta} &\geq \left(\frac{a}{\cos\theta} + \frac{b}{\sin\theta}\right)(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) \\
&\geq (\sqrt{a\cos\phi} + \sqrt{b\sin\phi})^2
\end{aligned}
$$

上式，對任意銳角 ϕ 皆成立。取 $\phi = \cos^{-1}\sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}}$, 當 $\theta = \phi$，兩不等號皆爲等號，所以 $\frac{a}{\cos\theta} + \frac{b}{\sin\theta} \geq (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$。

2. 三點共線得 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 3$, 算幾得 $pq \geq \frac{4}{9}$。

3. (1) $a_n > 0$, 算幾得 $a_n > 1$, $a_n - a_{n+1} > 0$, 遞減有下界故收斂。

   (2) $0 < \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} \leq a_n - a_{n+1}$, $\sum(a_n - a_{n+1}) = 2 - 1 = 1$, 故收斂。

4. $C = [1 - \delta_{ij}]$, $B = AC$, $\det B = a \det C$, 對 C 對式運算，把所有的列加到同一列。

5. $x + \frac{x}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x}{4!} + \frac{x}{5!} + \frac{x}{6!} \geq 2012$ (by lianger)。

6. $\int_0^{\frac{1}{3}}(1-x)dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{2}{9x}dx + \int_{\frac{1}{3}}^{1}(1-x)dx$。

7. 令 $\alpha = b - a$, $\beta = 3b - 5a$, 則 $\beta = \alpha^3$, 將 a, b, β 以 α 表示，代入 $x^2 + y^2 = 5$。

typed in latex by 寸絲@2012.05.16