

姓名：

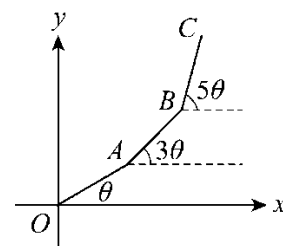
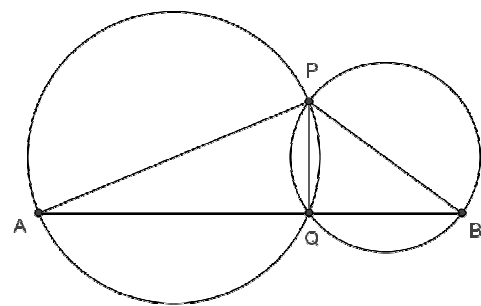
彌

封

線

一、填充題(11 格，每格 5 分，共 55 分)

1. 有一個很大的正整數 $P = C_0^{101} + C_1^{101} + C_2^{101} + C_3^{101} + \cdots + C_{50}^{101}$ ，已知 P 是 m 位數的正整數，且首位數字為 n ，則 $m + n =$ _____。
2. 已知函數 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$ ，求 $f'(2) =$ _____。
3. 所有介於 0 與 1 之間，以 3^{10} 為分母的最簡分數的總和為_____。
4. 設袋中有大小相同的紅球 3 顆，白球 4 顆，黑球 5 顆，共 12 顆球，從袋中一次取出一顆球，取後不放回，重覆摸取，直到取完，則紅球比白球先取完的機率為_____。
5. 設 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 皆為首項為 1 的無窮等比收斂級數，若 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \frac{8}{3}$ ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n) = \frac{4}{5}$ ，求 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 =$ _____。
6. 四邊形 $OABC$ 中， $\overline{AB} = 3\sqrt{3}$ ， $\overline{BC} = 6\sqrt{3}$ ，且 $\angle AOC = 60^\circ$ ， $\angle OAB = \angle BCO = 90^\circ$ ，若 $\overrightarrow{OB} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OC}$ ，其中 x, y 為實數，則數對 $(x, y) =$ _____。
7. 如右圖，大圓與小圓相交於 P, Q 兩點，其半徑分別為 $2\sqrt{3}$ 與 2， \overline{PQ} 長為 $2\sqrt{3}$ ，若 \overline{AB} 過 Q 點，且 A, B 分別在大圓與小圓上，則比值 $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ 為_____。
8. 設 $x \neq 0$ 且 $x \geq y \geq 0$ ，若 $\frac{5x+4y}{x+2y}$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則 $M + m =$ _____。
9. $\int_{-4}^4 \left| 4 + x - \sqrt{16 - x^2} \right| dx =$ _____。
10. 參考右圖，已知 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = 1$ ， $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，若 C 點在 y 軸上，求 θ 之值為_____。
(註：虛線平行 x 軸)
11. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AC} = 4$ ， $\overline{BC} = 6$ ，若 $\cos(A - B) = \frac{2}{3}$ ，則 $\triangle ABC$ 的面積為_____。



二、計算證明題(共 5 題，無過程不予計分，配分如題後)

1. 「某次隨機抽樣調查中，在 95% 信心水準下，台灣的大學生有 52% 在打工，抽樣誤差為正負 4 個百分點。」
(1) 求 95% 的信賴區間(2 分)；(2) 請解釋 95% 信賴區間的意義。(5 分)
2. 試求實數 a 的範圍，使得不等式： $\log_a \frac{2x^2 + ax + 3}{x^2 + x + 2} \leq \log_a 3$ ，對任意實數 x 恒成立。(10 分)
3. 設所有 1 的 n 次方根的和與積分別為 S 與 P ，其中 n 為大於 1 的自然數，求證：(1) $S = 0$ (4 分)；(2) $P = 1$ 或 -1 (6 分)
4. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = a$ ， $\overline{AC} = b$ ，試證： $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan(\frac{A-B}{2})}{\tan(\frac{A+B}{2})}$ 。(8 分)
5. 若 $\frac{36}{385} = \frac{a}{5} + \frac{b}{7} + \frac{c}{11}$ ，且 $|a| < 5$ ， $|b| < 7$ ， $|c| < 11$ ，試問所有的整數解 $(a, b, c) = ?$ (10 分)
- 6.