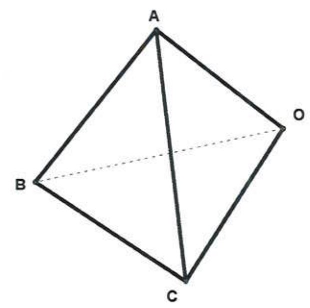
國立彰化高級中學 101 學年度第 1 次教師甄選數學科筆試試題

考試時間：120 分鐘

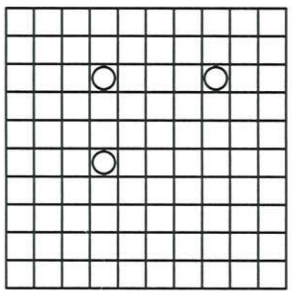
第一部份：填充題(每題 5 分，共 50 分。全對始計分)

1. 如附圖，四面體 O-ABC 中 $\overline{AB}=4$，$\overline{OC}=5$，$\overline{AB}$ 與 $\overline{OC}$ 的公垂線段長為 3，則此四面體的體積為_________。

本題條件不足，送分



2. 將 3 個 ○ 隨意填入 10×10 的方格中任 3 個相異的方格內，則填入後恰 2 個 ○ 在同一行，恰 2 個 ○ 在同一列 (例如附圖所示) 的機率為 _________。



3. 設四次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1)=2$，$f(2)=4$，$f(3)=1$，$f(4)=3$，$f(5)=5$，則 $f(6)=$_________。

4. 一個抽獎活動依排隊順序抽獎，輪到抽獎的人有一次抽獎機會，抽獎方式為丟擲一枚公正銅板，正面為中獎，反面為沒中獎。獎品有四份，活動直到四份獎品都被抽中為止。則在排第六位的人可以抽獎的情況下，排第七位的人可以抽獎的條件機率為 _________。

5. 設 $a_n=\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}, n\in N$，則 $\sum\limits_{k=1}^{9999}a_k=$_________。

6. 在一個七位數中，若每一出現的數字都至少出現兩次，就稱這種七位數是一個好數。例如：2222222 和 2223323 都是好數，但是 2222223 和 3456777 都不是好數。則所有的七位數中，好數有 _________ 個。

7. 若 $z_k=\cos\dfrac{k\pi}{12}+i\sin\dfrac{k\pi}{12}$，其中 $k=0,1,2,\ldots,11$；若 $\omega=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，則 $\sum\limits_{k=0}^{11}|z_k-\omega|^2=$_________。

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}[(n+2)(n+4)\cdots(n+2n)]^{\frac{1}{n}}=$_________。

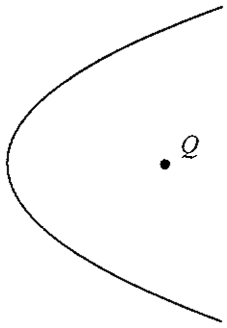
9. 已知 x 為實數，則 $\sqrt{-x^2+4x+21}-\sqrt{-x^2+10x-24}$ 的最大值為_________。

10. 方程式 $\sqrt[3]{x+\sqrt{8}}-\sqrt[3]{x-\sqrt{8}}=\sqrt{2}$ 的解為_________。

第二部份：計算作圖題 (共 50 分)

1. 以 O 表坐標平面的原點。給定一點 $A(4,3)$，而點 $B(x,0)$在正 x 軸上變動。
以$l(x)$表示$\overline{AB}$長，求$\triangle OAB$ 中兩邊長比值$\dfrac{x}{l(x)}$的最大值。
(請給出兩種解法：一種是微積分的方法、一種是幾何觀點的方法。) (每種解法 5 分，共 10 分)

2. 附圖是拋物線的一部份，Q 為拋物線之對稱軸上的一點。
試利用尺規作圖的方法，找出此拋物線的焦點。(請作圖並寫出作法)(5 分)



3. 空間中，$x^2+y^2=3^2,\ z=0$ 及 $x-z=0$ 所圍成封閉區域的體積為何？(7 分)

4. 試求出最小的自然數n，使得方程組$\begin{cases}\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n=0\\ \sin x_1+2\sin x_2+\cdots+n\sin x_n=100\end{cases}$有解。(7 分)

5. $\begin{bmatrix}2012\times2013 & 2013\times2014 & 2014\times2015\\ 2013\times2014 & 2014\times2015 & 2015\times2016\\ 2014\times2015 & 2015\times2016 & 2016\times2017\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 4\\ 9\end{bmatrix}$，求 $x+y+z$ 之值。(7 分)

6. 已知實數數列$a_1,a_2,a_3,\cdots$滿足$\begin{cases}a_1=1\\ 3a_{n+1}=a_n{}^2+3a_n,n=1,2,\ldots\end{cases}$，求級數$\dfrac{1}{a_1+3}+\dfrac{1}{a_2+3}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2012}+3}$之和的整數部分。
(7 分)

7. [ ]表高斯符號，求$\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1\times2}+\sqrt[3]{2^2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\times4}+\sqrt[3]{4^2}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5\times6}+\sqrt[3]{6^2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{999^2}+\sqrt[3]{998\times999}+\sqrt[3]{1000^2}}\right]$之值。(7 分)