

# 彰化縣立田中高級中學 101 年 數學科 教師甄試試題

## 一、選擇題(每題 3 分，共 30 分)

考試時間：80 分鐘

1. 設  $a, b$  為實數，滿足  $(a+bi)^{2003} = a-bi$  的數對  $(a,b)$  有多少組？

(A) 2002 (B) 2003 (C) 2004 (D) 2005。

2.  $n$  為正整數， $n$  為  $16!$  的因數，但不為  $14!$  的因數，則  $n$  之最小值為

(A) 124 (B) 125 (C) 126 (D) 121。

3. 若矩陣  $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$ ，下列何者是  $A$  的最小多項式(the minimal polynomial)？

(A)  $(x-1)(x-2)^2$  (B)  $(x-1)^2(x-2)$  (C)  $(x-1)(x-2)$  (D)  $(x-1)$ 。

4.  $x^4 - 2(3a+1)x^2 + 7a^2 + 3a = 0$  恰有兩實根，求實數  $a$  之最小值為何？

(A)  $-\frac{6}{7}$  (B)  $-\frac{4}{7}$  (C)  $-\frac{3}{7}$  (D)  $-\frac{2}{7}$ 。

5. 設  $x > 1, y > 1$ ，且  $2 \times \log_x y - 2 \times \log_y x + 3 = 0$ ，則  $x^2 - 6y^2 + 5$  的最小值為何？

(A)  $-4$  (B)  $-3$  (C)  $-2$  (D)  $-1$ 。

6. 在空間座標系中有一直線  $L: \begin{cases} x=0 \\ y-z=1 \end{cases}$  及一球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ，現以  $z$  軸為中心軸，將直線  $L$  繞  $z$  軸轉一圈後，會與球面  $S$  交出兩圓，則此兩交圓面積中，小圓面積：大圓面積為何？

(A) 1:4 (B) 3:4 (C) 4:9 (D) 9:16。

7. 某班有 48 個學生，某次考試，經計算得算術平均數為 70 分，標準差為  $S$  分，後來發現成績登錄錯誤，A 生得 80 分卻被誤記為 50 分，B 生得 70 分而被誤記為 100 分，更正後重算得標準差為  $S_1$ ，則下列敘述何者正確？

(A)  $S_1 < S - 5$  (B)  $S = S_1$  (C)  $S - 5 \leq S_1 < S$  (D)  $S < S_1 \leq S + 5$ 。

8. 判斷下列數列及級數收斂與否，並選出發散者？

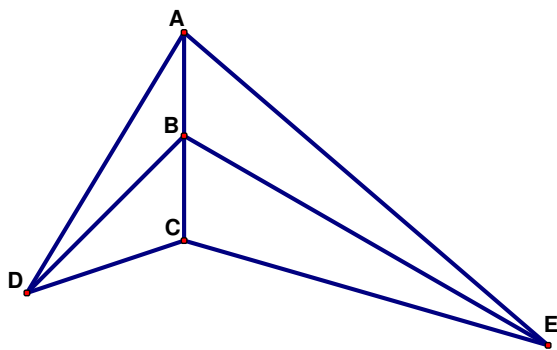
(A)  $\left\{ a_n \mid a_n = \left(1 + \frac{7}{n}\right)^n \right\}$  (B)  $\left\{ b_n \mid b_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\ln n}} \right\}$  (C)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$  (D)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$ 。

9. 以 1, 2, 4, 8 為元的所有  $2 \times 2$  矩陣，假設每一個矩陣被選取的機會均等，則從中任選一個矩陣，其為可逆之機率為何？

(A)  $\frac{11}{64}$  (B)  $\frac{16}{64}$  (C)  $\frac{48}{64}$  (D)  $\frac{53}{64}$ 。

10. 下圖為立體示意圖(圖僅供參考)，線段 $\overline{AC}$ 垂直於過 $D$ 、 $C$ 、 $E$ 這三點的平面，設 $\overline{AB} = \overline{BC} = 10$ ， $\overline{DC} = 15$ ， $\overline{CE} = 30$ ， $\angle CDB = \alpha$ ， $\angle BDA = \beta$ ， $\angle CEB = \alpha'$ ， $\angle BEA = \beta'$ ，下列何者為真？

- (A)  $\alpha = \alpha' + \beta'$  (B)  $\alpha + \beta > \frac{\pi}{3}$  (C)  $\alpha' + \beta' < \frac{\pi}{6}$  (D)  $\alpha = 2\alpha'$ 。



## 二、計算證明題(每題 10 分，共 70 分)(必須寫下詳細的過程，否則不予計分)

1. 已知聯立方程式 $\begin{cases} 4x+3y=12 \\ y+1=a(x+2) \end{cases}$ 的解 $x$ ， $y$ 都是正數，求實數 $a$ 的範圍。

2. 敘述並證明「輾轉相除法原理」。

3. 空間中的四個點 $A(1,1,2)$ 、 $B(-2,1,5)$ 、 $C(3,1,2)$ 、 $D(2,-1,1)$ ， $P$ 為直線 $\overline{CD}$ 上的一個動點，試求 $\Delta APB$ 的最小面積。

4. 令 $T$ 為定義在 $R^3$ 的函數，且 $T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2 + x_3, 7x_1 - 5x_2 + x_3, 6x_1 - 6x_2 + 2x_3)$ ，試回答下列問題：

(1) 寫出函數 $T$ 對應的矩陣 $A$ 。(3分)

(2) 解釋矩陣 $A$ 的行列式值所代表之意義。(3分)

(3) 矩陣 $A$ 是否可對角化？為什麼？(4分)

5. 以 $(x-1)^3$ 除 $x^{n+1} - x^n - nx + (n-1)$ 之餘式為何？

6. 計算 $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$

7. 半徑 $a$ 的半球體之容器裝滿水，今慢慢地將之傾斜 $30^\circ$ ，求流出水量的體積。

## 彰化縣立田中高級中學 101 年 數學科 教師甄試試題參考答案

### 一、選擇題(每題3分，共30分)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	B	C	C	A	D	C	D	D	A

### 二、計算證明題(每題 10 分，共 70 分) (必須寫下詳細的過程，否則不予計分)

1.  $\frac{1}{5} < a < \frac{5}{2}$

2. 略

3.  $\sqrt{6}$

4. (1)  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

(2) 略

(3) 否。略。

5.  $n(x-1)^2 + (1-n)x + (n-2)$

6.  $3 + 3\sqrt[3]{2}$

7.  $\frac{11}{24}\pi a^3$