101 新竹女中 數學科 教師甄試參考解答　　　　　　　　　　　（2012.5.16 by hua0127）

一、填充題

1. 時針每一分鐘轉 $\frac{1}{2}$ 度，分針每分鐘轉 6 度，則

（1）在三點 x 分時，12 點鐘與時針的順時針夾角為 $90+\frac{x}{2}$ 度；與分針的夾角為 $6x$ 度

（2）在八點 y 分時，12 點鐘與時針的順時針夾角為 $240+\frac{y}{2}$ 度；與分針的夾角為 $6y$ 度

利用夾角相等，解聯立方程式 $\begin{cases} 6x=240+\frac{y}{2} \\ 6y=90+\frac{x}{2} \end{cases}$，可解出 $(x,y)=(\frac{540}{13},\frac{240}{13})$

2. $f(x)=(x+2)(x-1)$，考慮

（1）$12\,|\,x+2 \Rightarrow x=10,22,34,\ldots,94$ 共 8 個

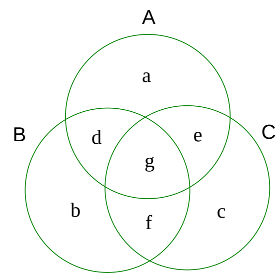
（2）$12\,|\,x-1 \Rightarrow x=1,13,25,\ldots,97$ 共 9 個

（3）$12\,|\,(x-1)(x+2)$ 且非(1)(2)情況的，有 0 個

所求共 $8+9=17$（個）

3. 如右圖，令 A,B,C 表示答對該題的人數，則依題意可知

$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f+g=25 \\ b+f=2(c+f) \\ a-1=d+g+e \\ b+c=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+f=26 \\ b-2c=f \\ b+c=a \\ a-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b=26-a\geq 0 \\ f=26-3a\geq 0 \\ c=a-b\geq 0 \\ a-1\geq 0 \end{cases}$$



推得 $3\,|\,26-a,\ 1\leq a\leq 8 \Rightarrow a=2,5,8$

代入限制式檢查只有 $a=8$ 合，此時 $b=6$ 即為所求。

4. 若 $|x|<1$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2-x)(x+x^{2n})}{1+x^{2n}}=x(2-x)$；

若 $|x|>1$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2-x)(x+x^{2n})}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2-x)(x^{1-2n}+1)}{x^{-2n}\cdot 1}=2-x$；

若 $x=1$，$f(x)=1$；若 $x=-1$，$f(x)=0$，

所以 $f(x)=\begin{cases}2x-x^2, & |x|<1 \\ 2-x, & |x|>1 \\ 1, & x=1 \\ 0, & x=-1\end{cases}$ ，故所求為 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1(2x-x^2)dx+\int_1^2(2-x)dx=\frac{7}{6}$.

5. 拆開 $f(x)$ 整理得到 $f(x)=(x^2+1)^2-k^2(x+1)^2=(x^2+k(x+1)+1)(x^2-k(x+1)+1)$,

即 $f(x)=(x^2+kx+(k+1))(x^2-kx-(k-1))$, 因為 $f\in\mathbb{R}[x]$ 且 $f(x)=0$ 只有兩相異實根,

(1) $(x^2+kx+(k+1))=0$ 有相異實根, $(x^2-kx-(k-1))=0$ 有兩虛根:

解 $\begin{cases}\Delta_1=k^2-4(k+1)>0\Rightarrow k>2+2\sqrt{2}\ \ or\ \ k<2-2\sqrt{2} \\ \Delta_2=k^2+4(k-1)<0\Rightarrow -2-2\sqrt{2}<k<-2+2\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow$ 交集得 $-2-2\sqrt{2}<k<2-2\sqrt{2}$

(2) $(x^2+kx+(k+1))=0$ 有兩虛根, $(x^2-kx-(k-1))=0$ 有相異實根:

解 $\begin{cases}\Delta_1=k^2-4(k+1)<0\Rightarrow 2-2\sqrt{2}<k<2+2\sqrt{2} \\ \Delta_2=k^2+4(k-1)>0\Rightarrow k>-2+2\sqrt{2}\ \ or\ \ k<-2-2\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow$ 交集得 $-2+2\sqrt{2}<k<2+2\sqrt{2}$

由(1),(2)取聯集得到 k 的範圍為 $-2-2\sqrt{2}<k<2-2\sqrt{2}\ \ or\ \ -2+2\sqrt{2}<k<2+2\sqrt{2}$

6. 考慮排容原理，所求為 $7!-n(\text{甲排1}\cup\text{甲排2}\cup\text{乙排2}\cup\text{乙排3}\cup\text{丙排3}\cup\text{丙排4}\cup\text{丁排5})$

小心計算裡面的交集個數（老實說我大概也算錯了兩三次…）

得到所求為 $7!-(7\cdot 6!-16\cdot 5!+14\cdot 4!-4\cdot 3!)=1608$.

7. 令 $L:\begin{cases}x=1+au \\ y=2+bu \\ z=-1+cu\end{cases}$, $u\in\mathbb{R}$, $L_1:\begin{cases}x=2t \\ y=-1+3t \\ z=-3+t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$, $L_2:\begin{cases}x=-1+4s \\ y=4-2s \\ z=-2-s\end{cases}$, $s\in\mathbb{R}$

令 L,L_1 交於 A 點，L,L_2 交於 B 點，故方程組

$\begin{cases}1+au=2t \\ 2+bu=-1+3t \\ -1+cu=-3+t\end{cases}$, $\begin{cases}1+au=-1+4s \\ 2+bu=4-2s \\ -1+cu=-2-s\end{cases}$ 均有解，利用比例關係得到兩個方程式

$\begin{cases}a-b+c=0 \\ 2a+3b+2c=0\end{cases}\Rightarrow a:b:c=1:0:-1$, 所以取 $(a,b,c)=(1,0,-1)$

代回求交點可得到$A(2,2,-2)$， $B(3,2,-3)$， 故所求$\overline{AB}=\sqrt{2}$.

（註：本題可參閱**寸絲兄**的作法，比較直觀！）

8. 這一題我是跟我一個學長討論的，這是他告訴我的想法:

考慮函數$g(x)=\dfrac{\sqrt{4+32x^2+x^4}+\sqrt{4+x^4}}{x}$， 則 $f(x)\cdot g(x)=32$， 我們想要讓$f(x)$越大的話，只需考慮 $f(x)>0$的時候，此時易知$x>0$； 之後觀察$g(x)\geq f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}^+$,

故 $f(x)$要越大，相當於讓$\left|f(x)-g(x)\right|$越小，故我們轉向考慮$\left|f(x)-g(x)\right|=g(x)-f(x)$

因為$g(x)-f(x)=\dfrac{2\sqrt{4+x^4}}{x}=2\sqrt{x^2+\dfrac{4}{x^2}}\geq 2\sqrt{2\sqrt{4}}=4$（算幾不等式)， 等號成立時

$x^2=\dfrac{4}{x^2}\Rightarrow x^4=4$（注意到$x\in\mathbb{R}^+\ x\neq 0$）此時取$x=\sqrt{2}$， 得到的最大值為4,

故所求$(x_0,M)=(\sqrt{2},4)$.

（本題可參閱 lianger 兄的作法，考慮幾何觀點，個人覺得較簡潔有力）

9. 令$t=x^2\geq 0$， 則原函數變為$f(t)=8t^2+8t\cos\theta+3\sin\theta$ 在$t\geq 0$時 $f(t)$恆大於 0，

考慮軸為$x=-\dfrac{\cos\theta}{2}$， 分情況討論：

（1）若$-\dfrac{\cos\theta}{2}<0$， 則只需 $f(0)>0$即可滿足， 此情形的θ角範圍為$\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$

（2）若$-\dfrac{\cos\theta}{2}>0$， 則函數圖形需在x軸上方，判別式$\Delta<0$， 此時

$$\begin{cases}-\dfrac{\cos\theta}{2}>0\Rightarrow\cos\theta<0\Rightarrow\theta\in(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})\\ \Delta=(8\cos\theta)^2-96\sin\theta<0\Rightarrow(\sin\theta+2)(2\sin\theta-1)>0\Rightarrow\sin\theta>\dfrac{1}{2}\Rightarrow\theta\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6})\end{cases}$$

交集得到θ角範圍為$\theta\in(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6})$

（3）若$-\dfrac{\cos\theta}{2}=0$， 此時$\theta=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$， 代入檢驗只有$\theta=\dfrac{\pi}{2}$滿足

由(1), (2), (3)取聯集得到θ角範圍為$\theta\in(0,\dfrac{5\pi}{6})$.

10. 移項得 $\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{2x^2-1}=\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{2x^2+2x+3}$，兩邊平方得到

$(3x^2-x+1)-2\sqrt{(x^2-x+2)(2x^2-1)}=(3x^2-x+1)-2\sqrt{(x^2-3x-2)(2x^2+2x+3)}$，故

$(x^2-x+2)(2x^2-1)=(x^2-3x-2)(2x^2+2x+3)\Rightarrow x^3+5x^2+7x+2=0$，因式分解為

$(x+2)(x^2+3x+1)=0$，故 $x=-2,\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$，因為限制 $2x^2-1\geq 0$， $x^2-3x-2\geq 0$

故解為 $x=-2,\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

11. 令三個圓心由左至右分別為 P,Q,R，分別向 $\overline{AB}$ 作三垂線得垂足為 D,E,F，令 $\overline{QE}=x$，因為 $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{QR}}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$， $\overline{PD}=6$， $\overline{RF}=3$， $x=\dfrac{2}{3}\overline{PD}+\dfrac{1}{3}\overline{RF}=5$．考慮 ΔAQB， $\cos\angle AQE=\dfrac{5}{9}$，所以 $\angle AQE=\cos^{-1}\dfrac{5}{9}$，故所求 AB 劣弧長為 $9\cdot(2\angle AQE)=18\cos^{-1}\dfrac{5}{9}$.

12. 令 $L_1:y=mx$， $L_2:y=-\dfrac{1}{m}x$，其中 $m\neq 0$，解 L_1,L_2 與 γ 的交點為 $B(\dfrac{m}{4},\dfrac{m^2}{4})$， $C(-\dfrac{1}{4m},\dfrac{1}{4m^2})$

則 $\overline{AB}^2=\dfrac{m^2}{16}+\dfrac{m^4}{16}$， $\overline{AC}^2=\dfrac{1}{16m^2}+\dfrac{1}{16m^4}$，由科西不等式知

$\overline{AB}^2\cdot\overline{AC}^2=(\dfrac{m^2}{16}+\dfrac{m^4}{16})(\dfrac{1}{16m^2}+\dfrac{1}{16m^4})\geq(\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{16})^2=\dfrac{1}{64}$， $(\Delta ABC)^2=\dfrac{1}{4}(\overline{AB}^2\cdot\overline{AC}^2)\geq(\dfrac{1}{16})^2$

所以 $\Delta ABC\geq\dfrac{1}{16}$

二、計算題（沒有答案故不太確定）

1. 令 $L:y=ax+b$，則方程式 $(x-t)^2-6x+8t=ax+b$ 對於所有 t 均有重根，整理得到

$x^2-(2t+a+6)x+(t^2+8t-b)=0$ 之 $\Delta=(2t+a+6)^2-4(t^2+8t-b)=0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

$(a^2+12a+4b+36)+t(4a-8)=0$， $\forall t\in\mathbb{R}$．故得到

$\begin{cases}4a-8=0\\ a^2+12a+4b+36=0\end{cases}$，所以 $(a,b)=(2,-16)$，即 $L:y=2x-16$.

2. 略

3. （1）（a） $P_2=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$

(b) 考慮丙不玩的情況下，甲$\to$乙,戊， 乙$\to$戊， $P_2^{'}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$

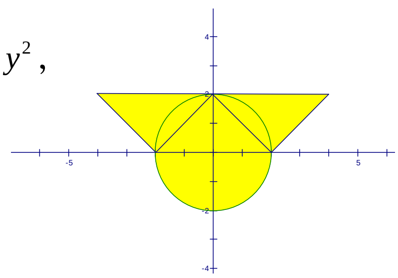
所以所求為$P=\frac{3}{5}\cdot P_2+\frac{2}{5}\cdot P_2^{'}=\frac{2}{5}$

(2) 考慮馬可夫鏈矩陣 $M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$，解平衡狀態之值，即解方程組

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}，\text{其中 } a+b+c+d+e=1\Rightarrow\begin{cases} \frac{1}{2}d=a \\ \frac{1}{3}a+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d=b \\ \frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b=c \\ e=d \\ \frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c=e \end{cases}$$

解出$(a,b,c,d,e)=(\frac{3}{25},\frac{6}{25},\frac{4}{25},\frac{6}{25},\frac{6}{25})$， 故所求為$P=\frac{6}{25}$

4. 區域面積如右圖，x軸正向的邊界函數為$x=y+2$與 $x^2=4-y^2$，



所求為$\pi\left(\int_0^2 (y+2)^2dy+\int_{-2}^0 (4-y^2)dy\right)=\pi(\frac{56}{3}+\frac{16}{3})=24\pi$

5. γ_1上過$A(4\sqrt{2},3\sqrt{2})$的切線為$\frac{\sqrt{2}}{16}x+\frac{\sqrt{2}}{12}y=1$，

此切線的法向量取為$(3,4)$， 令γ_3的圓心為$C(4\sqrt{2}+3t,3\sqrt{2}+4t)$， 由圖形知$t>0$，

則γ_3的半徑為$5t$. 利用關係式$\overline{OC}=8-5t$可得到方程式

$\sqrt{(4\sqrt{2}+3t)^2+(3\sqrt{2}+4t)^2}=8-5t$， 可解出$t=\frac{7}{24\sqrt{2}+40}=\frac{5-3\sqrt{2}}{8}$，

故所求γ_3的半徑為$5t=\frac{25-15\sqrt{2}}{8}$