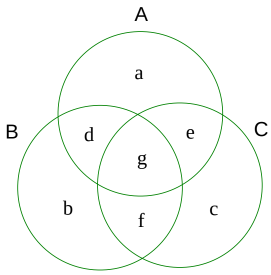
101 新竹女中 數學科 教師甄試

填充題

3. 如右圖，令 A,B,C 表示答對該題的人數，則依題意可知



$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f+g=25 \\ b+f=2(c+f) \\ a-1=d+g+e \\ b+c=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+f=26 \\ b-2c=f \\ b+c=a \\ a-1\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b=26-a\ge 0 \\ f=26-3a\ge 0 \\ c=a-b\ge 0 \\ a-1\ge 0 \end{cases}$$

推得 $3|26-a,\ 1\le a\le 8 \Rightarrow a=2,5,8$

代入限制式檢查只有 $a=8$ 合，此時 $b=6$ 即為所求。

6. 考慮排容原理，所求為 $7!-n(\text{甲排}1\cup\text{甲排}2\cup\text{乙排}2\cup\text{乙排}3\cup\text{丙排}3\cup\text{丙排}4\cup\text{丁排}5)$

小心計算裡面的交集個數（老實說我大概也算錯了兩三次…）

得到所求為 $7!-(7\cdot 6!-16\cdot 5!+14\cdot 4!-4\cdot 3!)=1608$.

二、計算題（沒有答案故不太確定）

1. 令 $L: y = ax + b$，則方程式 $(x-t)^2 - 6x + 8t = ax + b$ 對於所有 t 均有重根，整理得到

$x^2 - (2t + a + 6)x + (t^2 + 8t - b) = 0$ 之 $\Delta = (2t + a + 6)^2 - 4(t^2 + 8t - b) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

$(a^2 + 12a + 4b + 36) + t(4a - 8) = 0$，$\forall t \in \mathbb{R}$. 故得到

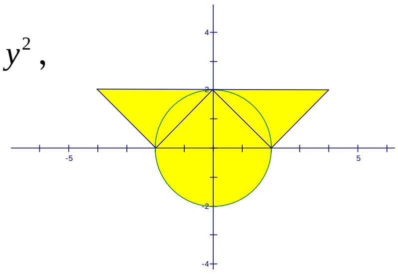
$\begin{cases} 4a - 8 = 0 \\ a^2 + 12a + 4b + 36 = 0 \end{cases}$，所以 $(a, b) = (2, -16)$，即 $L: y = 2x - 16$.

2. 略

3. 兩篇的計算題本題敘述好像不太一樣，故先略過。

4. 區域面積如右圖，x 軸正向的邊界函數為 $x = y + 2$ 與 $x^2 = 4 - y^2$，

所求為 $\pi\left(\int_0^2 (y+2)^2 dy + \int_{-2}^0 (4 - y^2) dy\right) = \pi(\frac{56}{3} + \frac{16}{3}) = 24\pi$



5. γ_1 上過 $A(4\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ 的切線為 $\frac{\sqrt{2}}{16}x + \frac{\sqrt{2}}{12}y = 1$,

此切線的法向量取為 $(3, 4)$，令 γ_3 的圓心為 $C(4\sqrt{2} + 3t, 3\sqrt{2} + 4t)$，由圖形知 $t > 0$，

則 γ_3 的半徑為 $5t$. 利用關係式 $\overline{OC} = 8 - 5t$ 可得到方程式

$\sqrt{(4\sqrt{2} + 3t)^2 + (3\sqrt{2} + 4t)^2} = 8 - 5t$，可解出 $t = \frac{7}{24\sqrt{2} + 40} = \frac{5 - 3\sqrt{2}}{8}$,

故所求 γ_3 的半徑為 $5t = \frac{25 - 15\sqrt{2}}{8}$