101 新竹女中 數學科 教師甄試

一、填充題

2. $f(x)=(x+2)(x-1)$，考慮

（1）$12|x+2 \Rightarrow x=10,22,34,\ldots,94$ 共8個

（2）$12|x-1 \Rightarrow x=1,13,25,\ldots,97$ 共9個

（3）$12|(x-1)(x+2)$ 且非（1）（2）情況的，有0個

所求共 $8+9=17$（個）

4. 若 $|x|<1$， $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2-x)(x+x^{2n})}{1+x^{2n}}=x(2-x)$；

若 $|x|>1$， $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2-x)(x+x^{2n})}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2-x)(x^{1-2n}+1)}{x^{-2n}\cdot 1}=2-x$；

若 $x=1$， $f(x)=1$；若 $x=-1$， $f(x)=0$，

所以 $f(x)=\begin{cases}2x-x^2, & |x|<1\\ 2-x, & |x|>1\\ 1, & x=1\\ 0, & x=-1\end{cases}$，故所求為 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1(2x-x^2)dx+\int_1^2(2-x)dx=\dfrac{7}{6}$.

5. 拆開 $f(x)$ 整理得到 $f(x)=(x^2+1)^2-k^2(x+1)^2=(x^2+k(x+1)+1)(x^2-k(x+1)+1)$,

即 $f(x)=(x^2+kx+(k+1))(x^2-kx-(k-1))$，因為 $f\in\mathbb{R}[x]$ 且 $f(x)=0$ 只有兩相異實根,

（1）$(x^2+kx+(k+1))=0$ 有相異實根，$(x^2-kx-(k-1))=0$ 有兩虛根:

解 $\begin{cases}\Delta_1=k^2-4(k+1)>0\Rightarrow k>2+2\sqrt{2}\ \ or\ \ k<2-2\sqrt{2}\\ \Delta_2=k^2+4(k-1)<0\Rightarrow -2-2\sqrt{2}<k<-2+2\sqrt{2}\end{cases}$ $\Rightarrow$ 交集得 $-2-2\sqrt{2}<k<2-2\sqrt{2}$

（2）$(x^2+kx+(k+1))=0$ 有兩虛根，$(x^2-kx-(k-1))=0$ 有相異實根:

解 $\begin{cases}\Delta_1=k^2-4(k+1)<0\Rightarrow 2-2\sqrt{2}<k<2+2\sqrt{2}\\ \Delta_2=k^2+4(k-1)>0\Rightarrow k>-2+2\sqrt{2}\ \ or\ \ k<-2-2\sqrt{2}\end{cases}$ $\Rightarrow$ 交集得 $-2+2\sqrt{2}<k<2+2\sqrt{2}$

由(1), (2)取聯集得到k的範圍為$-2-2\sqrt{2}<k<2-2\sqrt{2}$ or $-2+2\sqrt{2}<k<2+2\sqrt{2}$

8. 這一題我是跟我一個學長討論的，這是他告訴我的想法:

考慮函數$g(x)=\dfrac{\sqrt{4+32x^2+x^4}+\sqrt{4+x^4}}{x}$，則$f(x)\cdot g(x)=32$，我們想要讓$f(x)$越大的話，只需考慮$f(x)>0$的時候，此時易知$x>0$； 之後觀察$g(x)\geq f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}^+$,

故$f(x)$要越大，相當於讓$|f(x)-g(x)|$越小，故我們轉向考慮$|f(x)-g(x)|=g(x)-f(x)$

因為$g(x)-f(x)=\dfrac{2\sqrt{4+x^4}}{x}=2\sqrt{x^2+\dfrac{4}{x^2}}\geq 2\sqrt{2\sqrt{4}}=4$（算幾不等式），等號成立時

$x^2=\dfrac{4}{x^2}\Rightarrow x^4=4$（注意到$x\in\mathbb{R}^+$ $x\neq 0$）此時取$x=\sqrt{2}$，得到的最大值為4,

故所求$(x_0,M)=(\sqrt{2},4)$.

9. 令$t=x^2\geq 0$，則原函數變為$f(t)=8t^2+8t\cos\theta+3\sin\theta$ 在$t\geq 0$時 $f(t)$恆大於 0，

考慮軸為$x=-\dfrac{\cos\theta}{2}$，分情況討論：

(1) 若$-\dfrac{\cos\theta}{2}<0$，則只需$f(0)>0$即可滿足，此情形的θ角範圍為$\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$

(2) 若$-\dfrac{\cos\theta}{2}>0$，則函數圖形需在x軸上方，判別式$\Delta<0$，此時

$$\begin{cases}-\dfrac{\cos\theta}{2}>0\Rightarrow\cos\theta<0\Rightarrow\theta\in(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})\\ \Delta=(8\cos\theta)^2-96\sin\theta<0\Rightarrow(\sin\theta+2)(2\sin\theta-1)>0\Rightarrow\sin\theta>\dfrac{1}{2}\Rightarrow\theta\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6})\end{cases}$$

交集得到θ角範圍為$\theta\in(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6})$

(3) 若$-\dfrac{\cos\theta}{2}=0$，此時$\theta=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$，代入檢驗只有$\theta=\dfrac{\pi}{2}$滿足

由(1), (2), (3)取聯集得到θ角範圍為$\theta\in(0,\dfrac{5\pi}{6})$.

10. 移項得 $\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{2x^2-1}=\sqrt{x^2-3x-2}-\sqrt{2x^2+2x+3}$，兩邊平方得到

$(3x^2-x+1)-2\sqrt{(x^2-x+2)(2x^2-1)}=(3x^2-x+1)-2\sqrt{(x^2-3x-2)(2x^2+2x+3)}$，故

$(x^2-x+2)(2x^2-1)=(x^2-3x-2)(2x^2+2x+3)\Rightarrow x^3+5x^2+7x+2=0$，因式分解為

$(x+2)(x^2+3x+1)=0$，故 $x=-2,\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$，因為限制 $2x^2-1\geq 0$，$x^2-3x-2\geq 0$

故解為 $x=-2,\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

11. 令三個圓心由左至右分別為 P,Q,R，分別向 $\overline{AB}$ 作三垂線得垂足為 D,E,F，令 $\overline{QE}=x$，

因為 $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{QR}}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$，$\overline{PD}=6$，$\overline{RF}=3$，$x=\dfrac{2}{3}\overline{PD}+\dfrac{1}{3}\overline{RF}=5$．考慮 ΔAQB，$\cos\angle AQE=\dfrac{5}{9}$，

所以 $\angle AQE=\cos^{-1}\dfrac{5}{9}$，故所求 AB 劣弧長為 $9\cdot(2\angle AQE)=18\cos^{-1}\dfrac{5}{9}$.

12. 令 $L_1: y=mx$，$L_2: y=-\dfrac{1}{m}x$，其中 $m\neq 0$，解 L_1,L_2 與 γ 的交點為 $B(\dfrac{m}{4},\dfrac{m^2}{4})$，$C(-\dfrac{1}{4m},\dfrac{1}{4m^2})$

則 $\overline{AB}^2=\dfrac{m^2}{16}+\dfrac{m^4}{16}$，$\overline{AC}^2=\dfrac{1}{16m^2}+\dfrac{1}{16m^4}$，由科西不等式知

$\overline{AB}^2\cdot\overline{AC}^2=(\dfrac{m^2}{16}+\dfrac{m^4}{16})(\dfrac{1}{16m^2}+\dfrac{1}{16m^4})\geq(\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{16})^2=\dfrac{1}{64}$，$(\Delta ABC)^2=\dfrac{1}{4}(\overline{AB}^2\cdot\overline{AC}^2)\geq(\dfrac{1}{16})^2$

所以 $\Delta ABC\geq\dfrac{1}{16}$