任意三個數的乘積

例題：

將十次多項式

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)(x+8)(x+9)(x+10)$展開後得

$x^{10}+55x^{9}+a_{8}x^{8}+a_{7}x^{7}+\cdots+10!$，若$a_{8}=55M$，$a_{7}=55^{2}N$，其中 M、N 為正整數，求(M，N)=?

先取一個數字與全部數字兩兩乘積相乘 N×(1×2+1×3+⋯+1×10+2×3+⋯+9×10)減去不合理的部分

1×[(1×2+1×3+⋯+1×10+2×3+⋯+9×10)－(1×2+1×3+⋯+1×10)]+

2×[(1×2+1×3+⋯+2×3+⋯+2×10+⋯+9×10)－(1×2+2×3+⋯+2×10)]+⋯+

10×[(1×2+⋯+9×10)－(1×10+2×10+⋯+9×10)]=

(1+2+⋯+10)(1×2+⋯+9×10)－[1×(1×2+1×3+⋯+1×10)+2×(1×2+2×3+⋯+2×10)+⋯

+10×(1×10+2×10+⋯+9×10)]=

55×(55×24)－{[1^{2}×(1+2+⋯+10)－1^{3}]+[2^{2}×(1+2+⋯+10)－2^{3}]+⋯+[10^{2}×(1+2+⋯+10)－10^{3}]}

=$55^{2}\times 24$－(1+2+⋯+10)×($1^{2}+2^{2}+\cdots+10^{2}$)+($1^{3}+2^{3}+\cdots+10^{3}$)

=$55^{2}\times 24-55\times\frac{10\times 11\times 21}{6}+(\frac{10\times 11}{2})^{2}=55^{2}\times 18$

$\because\ \frac{10C_{2}^{9}}{C_{3}^{10}}=3$　∴必有三組數字的乘積重複(例如：1×2×3，2×1×3，3×1×2)

∴所求＝$\frac{55^{2}\times 18}{3}=55^{2}\times 6$

推論

三個數字的兩兩乘積

設 N 個數字和=P，N 個數字平方和=q，N 個數字立方和=r，兩兩乘積和=m，則

由上題過程可知　$p\times m - p\times q + r = p\times(\frac{p^2-q}{2}) - p\times q + p^2 = \frac{1}{2}p^3 - \frac{3}{2}pq + p^2$

$\therefore$所求$=\frac{\frac{1}{2}p^3-\frac{3}{2}pq+p^2}{3} = \frac{1}{6}p^3 - \frac{1}{2}pq + \frac{1}{3}p^2$

$(\because p^2 = q + 2m \;\therefore m = \frac{p^2-q}{2}$ 且 $r = p^2)$