101 台中女中教甄(2012.4.22)參考解法(解法提供：Math Pro 的諸位熱心網友)

1. $y=(2^n\cdot x-1)(4^n\cdot x-1)$ ， $l_n=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} l_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$ 。

2.(法一)令 $t=3^x>0$ ， $t^2-(a-3)t-2(a-1)=(t+2)[t-(a-1)]=0$ ， $t=-2\vee a-1$ ，
故 $a-1>0$ ，即 $a>1$ 。
(法二)呈上題 $t^2-(a-3)t-2(a-1)=0$ 需有二實根且不得均非正
$D=B^2-4AC=(a+1)^2\geq 0$ (恆成立)扣除 $\begin{cases}\alpha+\beta=a-3\leq 0\\ \alpha\cdot\beta=2(a-1)\leq 0\end{cases}$
即 $t\in\mathbb{R}$ 扣除 $a\leq 1$ ，得 $a>1$ 。

3. $|z_1+z_2|=\left|3z^3+\frac{z^5}{3}\right|=|z^3|\cdot\left|3+\frac{z^2}{3}\right|=15\sqrt{15}\cdot|2+2\sqrt{6}i|=15\sqrt{15}\cdot 2\sqrt{7}=30\sqrt{105}$ 。

4.註：請留意對稱比例式的分子變數係數有的有負號。
設 $\overline{AC}$ 中點爲 M， $\overline{HF}$ 中點爲 N，則 $\overline{MN}$ 爲歪斜線的公垂線段，
易知 $M(1,1,1), N(1,2,3)$ ， $\cos\theta=\frac{(2,-2,1)\cdot(1,2,-1)}{|(2,-2,1)|\cdot|(1,2,-1)|}=\frac{-1}{\sqrt{6}}$ ， $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ ，
所求體積爲 $4(\frac{1}{2}\cdot\overline{MA}\cdot\overline{MD}\cdot\sin\theta)\cdot\overline{MN}=15\sqrt{6}$ 。

5.設 $t=\log_2 x$ ， $\frac{2t}{t-1}-\frac{42t}{t+4}+\frac{20t}{t+2}=0$ ，解得 $t=0\vee 2\vee\frac{-1}{2}$ ，即 $x=1\vee 4\vee\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

6. $3x^2y=3\sqrt{(xy)(x^3y)}\leq 729$ (等號成立於 $x=3,y=27$)，
$3x^2y=3(x)(x)(y)\geq 3(1)(1)(1)=3$ (等號成立於 $x=1,y=1$)，MAX+min=732。

7.其中某隊伍(姑且稱之彬爸隊)，
設與彬爸隊沒交手的隊伍有 n 隊(此 n 隊稱爲女神組)，
與彬爸隊有交手的隊伍有 $39-n$ 隊(與彬爸隊合稱宅男組)，
根據題意知，同組的隊伍均需交手，
所需賽場數爲 $C_2^n+C_2^{40-n}=n^2-40n+780\geq 380$ (等號成立於 $n=20$)。

8.原點與 $P(x,y)$ 之間符合題意的點數量爲 x 與 y 的最大公因數減一，
而 n 與 $n+5$ 的最大公因數只可能爲 1 或 5，
$a_1+a_2+\cdots+a_{2012}=a_5+a_{10}+a_{15}+\cdots+a_{2010}=4+4+4+\cdots+4=1608$ 。

9.代幾項，即可得規律爲 $(1)+(1+2+3)+(1+2+3+4+5)+\cdots+(1+2+3+\cdots+19)+1=716$ 。

10.由鏡射矩陣知 $\cos 2\theta=\frac{1}{2},\sin 2\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，故 $m=\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 。

11.最小的 m 個正偶數和爲 m^2+m ，最小的 n 個正奇數和爲 n^2 ，
得 $m^2+m+n^2=2012$ ，
設 $5m+12n=k$ ，將 $m=\frac{k-12n}{5}$ 代入 $m^2+m+n^2=2012$ ，
得 n 的一元二次方程式(係數帶 k)，利用判別式非負得 $k\leq 580.6$xx ，
當 $k=580$ ，解 $\begin{cases}m^2+m+n^2\leq 2012\\ 5m+12n=580\end{cases}$ ，無正整數解，故不合，
當 $k=579$ ，解 $\begin{cases}m^2+m+n^2\leq 2012\\ 5m+12n=579\end{cases}$ ，有正整數解 $m=15,n=42$ 。

12. $Q=A-3(P+Q)=A-3I=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ ， $Q=Q^2=Q^3=\cdots$ ，

$A^7=(Q+3I)^7=(1+3)^7Q-3^7(Q-I)=4^7Q+3^7P$ ， $\log_{12}\frac{1}{ab}=\log_{12}\frac{1}{12^7}=-7$ 。

13. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots$ 爲等差，公差 30^0 ，

$\tan 30^0=\tan(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_2\tan\alpha_1}$ ，即 $\tan\alpha_1\tan\alpha_2=-1+\sqrt{3}(\tan\alpha_2-\tan\alpha_1)$

同理 $\tan\alpha_2\tan\alpha_3=-1+\sqrt{3}(\tan\alpha_3-\tan\alpha_2)$ …

所求爲

$(-1)+\sqrt{3}(\tan\alpha_2-\tan\alpha_1)+(-1)+\sqrt{3}(\tan\alpha_3-\tan\alpha_2)+(-1)+\sqrt{3}(\tan\alpha_4-\tan\alpha_3)+\cdots$ 。
$+(-1)+\sqrt{3}(\tan\alpha_{12}-\tan\alpha_{11})+(-1)+\sqrt{3}(\tan\alpha_1-\tan\alpha_{12})=-12$

14.餘弦定理 $\overline{OB}^2=\overline{AO}^2+\overline{AB}^2-2\cdot\overline{AO}\,\overline{AB}\cos 150^0$ ，得 $\overline{AB}^2=2-\sqrt{3}$ 。

15.取捨原理 $C^3_1\cdot[(\frac{4}{5})^5-2(\frac{3}{5})^5+(\frac{2}{5})^5]=\frac{342}{625}$ 。

16.

(原錯誤之作法)

請自繪略圖，可知交三點， $4x=6\pi\cdot\sin^2 x$ ， $\sin^2 x=\frac{2}{3\pi}\cdot x$ ，

代特殊角，得交點於 $x=0\vee\frac{3}{4}\pi\vee\frac{3}{2}\pi$ ，所求爲 $(\frac{3}{2}\pi-\frac{3}{4}\pi)\cdot\frac{\sqrt{1+m^2}}{1}=\frac{3\sqrt{17}}{4}\cdot\pi$ 。

(註：精確作圖後發現，其實圖形並不是恰交三點，作法太不嚴謹)

(訂正後的作法)(感謝數學同好寸絲的指正)

考慮函數 $f(x)=4x$ 與 $g(x)=6\pi\cdot\sin^2 x$ ，

此二函數在區間 $[0,\frac{3}{2}\pi]$ 均有對稱點 $(\frac{3}{4}\pi,3\pi)$ ，

若存在某區間 $f(x)$ 在 $g(x)$ 上方，則對稱後的區間 $g(x)$ 在 $f(x)$ 上方，

因此所求的區間寬度是總寬度的一半(即 $\frac{3}{4}\pi$)，

所求爲 $(\frac{3}{4}\pi)\cdot\frac{\sqrt{1+m^2}}{1}=\frac{3\sqrt{17}}{4}\cdot\pi$ 。

證 1. $S=C^{100}_{50}\cdot(\frac{1}{2})^{100}=\frac{100!}{50!\,50!\,2^{100}}=\frac{(1\cdot3\cdot5\cdots99)}{50!\,2^{50}}\cdot\frac{(2\cdot4\cdot6\cdots100)}{50!\,2^{50}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}$ ，

$S\le\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{100}{101}$ ，

$S\cdot S\le(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100})(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{100}{101})=\frac{1}{101}$ ，

$S^2<\frac{1}{101}<\frac{1}{100}$ ， $S<\frac{1}{10}$ 。

計 2.反曲點爲三次多項式的對稱點(故面積相等)，

易知反曲點爲 $(\frac{4}{3},\frac{16}{27})$ ，故 $m=\frac{(\frac{16}{27})-0}{(\frac{4}{3})-0}=\frac{4}{9}$ 。