陸、 筆試試題及參考解答

100學年度高級中學數學能力競賽決賽

筆試試題（一）

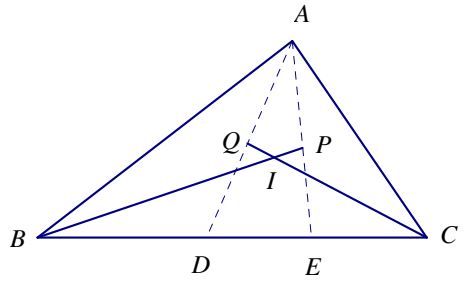
注意事項：

（1）時間：2 小時（13:30～15:30）
（2）配分：每題皆為 35 分
（3）不可使用計算器
（4）請將答案依序寫在答案卷內

一、試求所有使得 $(x+\frac{1}{y}, y+\frac{1}{z}, z+\frac{1}{x})$ 為正整數序對的正有理數序對 (x, y, z).

二、有 25 匹馬參加賽馬，已知每一匹馬的跑速固定，且它們的跑速都不一樣。若每一場賽馬最多只能有五匹馬參加，不測實際速度，只得名次。那麼最少要安排多少場賽馬才可得知跑速最快的第一名、第二名、第三名各為哪一匹馬？

三、如圖，在 ΔABC 中，$\angle BAC \geq 120°$，D, E 為 $\overline{BC}$ 邊上的二點，使得 $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ 將 $\angle BAC$ 三等分，且 $\angle ABC$, $\angle ACB$ 的角平分線分別交 $\overline{AE}, \overline{AD}$ 於點 P 與點 Q，而 I 為 ΔABC 的內心。試證：$\overline{BC}+\overline{PQ}<\overline{BP}+\overline{CQ}\leq\overline{BC}+\overline{DE}$。



100學年度高級中學數學能力競賽決賽
筆試試題（一）參考解答

注意事項：

（1）時間：2 小時（13:30～15:30）

（2）配分：每題皆為 35 分

（3）不可使用計算器

（4）請將答案依序寫在答案卷內

一、試求所有使得$(x+\frac{1}{y}, y+\frac{1}{z}, z+\frac{1}{x})$為正整數序對的正有理數序對$(x, y, z)$.

【參考解答】：設$x+\frac{1}{y}=a$，$y+\frac{1}{z}=b$，$z+\frac{1}{x}=c$，其中a, b, c為正整數，則

$y=\frac{1}{a-x}$，$z=\frac{1}{b-y}=\frac{a-x}{ab-1-bx}$．將此代入$z+\frac{1}{x}=c$可得$\frac{a-x}{ab-1-bx}+\frac{1}{x}=c$．此式等價於

$$(bc-1)x^2+(a-b+c-abc)x+ab-1=0 \qquad (1)$$

若$bc=1$，則$b=c=1$，因而$a=1$．此時$(x, y, z)=(\frac{y-1}{y}, y, \frac{-1}{y-1})$，其中 y 可為任意的正有理數，這顯然不可能（因為x, y, z必須都為正有理數）．同理，$ab=1$，$ac=1$也不可能．

因此僅需考慮$bc>1$，此時(1)式的判別式為

$$\Delta=(a-b+c-abc)^2-4(bc-1)(ab-1)=(abc-a-b-c)^2-4 \qquad (2)$$

因為x為正有理數，所以Δ為完全平方數，因而$abc-a-b-c=\pm 2$．

又$abc-a-b-c=a(bc-1)-b-c\geq bc-1-b-c=(b-1)(c-1)-2\geq -2$，

上式等號成立若且唯若所有的等號均成立，因而會導致$ab=1$，或$bc=1$，或$ac=1$，此與前所得的結論矛盾，故，

$$abc-a-b-c=2. \qquad (3)$$

若$a, b, c\geq 3$，則(3)不可能成立，所以至少有一個數為 1 或 2.

如果$a=1$，則$(b-1)(c-1)=4$，因而$\{b, c\}=\{3, 3\}$或$\{b, c\}=\{2, 5\}$．此時有

$a=1$，$b=2$，$c=5$ $\Rightarrow$ $(x, y, z)=(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, 2)$（此有 3 種輪換形式）;

$a=1$，$b=3$，$c=3$ $\Rightarrow$ $(x, y, z)=(\frac{1}{2}, 2, 1)$（此有 3 種輪換形式）;

$a=1$，$b=5$，$c=2$ $\Rightarrow$ $(x, y, z)=(\frac{2}{3}, 3, \frac{1}{2})$（此有 3 種輪換形式）.

如果$a=2$，則$(2b-1)(2c-1)=9$，因而$\{b, c\}=\{2, 2\}$或$\{b, c\}=\{1, 5\}$．此時有

$a=2$，$b=1$，$c=5$ $\Rightarrow$ $(x,y,z)=(\frac{1}{2},\frac{2}{3},3)$；(此為第 3 組解的輪換形式之一)

$a=2$，$b=5$，$c=1$ $\Rightarrow$ $(x,y,z)=(\frac{3}{2},2,\frac{1}{3})$；(此為第 1 組解的輪換形式之一)

$a=2$，$b=2$，$c=2$ $\Rightarrow$ $(x,y,z)=(1,1,1)$.

由於 $x,\ y,\ z$ 的順序是輪換的，所以輪換 $x,\ y,\ z$ 的順序亦為其解，亦即$(\frac{1}{3},\frac{3}{2},2)$，$(\frac{3}{2},2,\frac{1}{3})$，$(2,\frac{1}{3},\frac{3}{2})$；$(\frac{1}{2},2,1)$，$(2,1,\frac{1}{2})$，$(1,\frac{1}{2},2)$；$(\frac{2}{3},3,\frac{1}{2})$，$(3,\frac{1}{2},\frac{2}{3})$，$(\frac{1}{2},\frac{2}{3},3)$；$(1,1,1)$ 等 10 組序對都為所求.

二、有 25 匹馬參加賽馬，已知每一匹馬的跑速固定，且它們的跑速都不一樣。若每一場賽馬最多只能有五匹馬參加，不測實際速度，只得名次。那麼最少要安排多少場賽馬才可得知跑速最快的第一名、第二名、第三名各為哪一匹馬？

【參考解答】：可用七場賽事確定速度最快前三名：

A、25 匹馬分五組 A, B, …比賽，共五場賽事；

B、各組首名比一場，此場次第一名速度第一；

設獲此場次第一爲 A 組首名，B 組首名獲此場次第二，餘此類推。

C、速度總名次爲第二、三名的只能出現在 A 組第二、三名、B 組第一、二名、C 組第一名，(其它馬匹由前六場已知有至少三匹馬比它們快)。此五匹八再比一場決定第二、三名。

證明七場爲最少：以 25 點記這些馬，在一賽事後按名次將相鄰的連線稱爲邊，如兩場賽事名次如下：

A	B	C	D	E
B	F	G	D	H

則繪圖如下：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[dr] & C \arrow[r] & D \arrow[r] \arrow[dr] & E \\
 & & F \arrow[r] & G & H
\end{tikzcd}$$

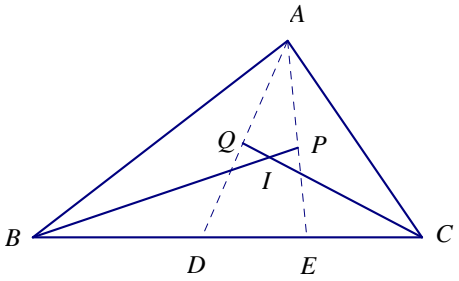
若某兩匹馬的排序已在前面的賽事在圖上表示，則不用再加線。

若只需六場，經過六場賽事後得一圖 G，此圖有 25 個點，最多得 $6\times4=24$ 邊，因第一的一定能與其它的比，第一名的點與其它點中間有一路徑連接，整個圖上任何兩點都可連接。由第一名的點開始，每新增加一點，至少增加一邊，但因最多有 24 邊，每次剛好增加一邊，如從某一點分枝出去。可推論沒有兩匹馬同時參加兩場賽事，否則有迴圈

形成，或邊由前一場所得的，後一場因重履，不須再加，邊數會少於 24。
若最快的馬參加兩場以上，則連結它的點的邊多於兩條，無法判斷第二快的馬。若只參加一場，但這是這樣的安排出現的最佳情形，安排沒有可能預先知道它是最快的，若它不是最快，在這一場它拿不到第一名，因此它一定會參與二場以上的賽事。證畢。

三、如圖，在 ΔABC 中，$\angle BAC \geq 120°$，D, E 為 $\overline{BC}$ 邊上的二點，使得 $\overline{AD}$，$\overline{AE}$ 將 $\angle BAC$ 三等分，且 $\angle ABC$，$\angle ACB$ 的角平分線分別交 $\overline{AE}, \overline{AD}$ 於點 P 與點 Q，而 I 為 ΔABC 的內心。試證：$\overline{BC}+\overline{PQ} < \overline{BP}+\overline{CQ} \leq \overline{BC}+\overline{DE}$。

【參考解答】:



Pf (1)

$\overline{PB}+\overline{CQ}=(\overline{BI}+\overline{PI})+(\overline{CI}+\overline{QI})$

$=(\overline{BI}+\overline{CI})+(\overline{PI}+\overline{QI}) > \overline{BC}+\overline{PQ}$

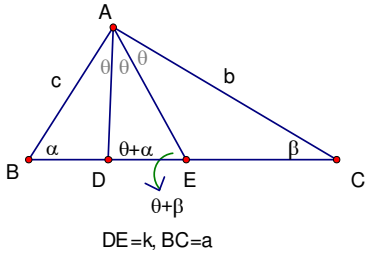
(2)

若 $\angle BAC > 135°$，則 $\angle BPE > 90° > \angle BEP$；

故 $\overline{BE} > \overline{BP}$ (大角對大邊)

同理，$\angle CQD > 90° > \angle CDQ$，

得知 $\overline{CD} > \overline{CQ}$ (大角對大邊)



因此，$\overline{BP}+\overline{CQ} < \overline{BE}+\overline{CD} = \overline{BC}+\overline{DE}$

若 $120° \leq \angle BAC \leq 135°$，

則令 $\overline{BC}=a$，$\overline{AB}=c$，$\overline{AC}=b$，$\overline{DE}=k$

先證 $\overline{BC}+\overline{DE} \geq \overline{AB}+\overline{AC} \Leftrightarrow a+k \geq b+c \Leftrightarrow a^2+2ak+k^2 \geq b^2+2bc+c^2$

由餘弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 3\theta \geq b^2+c^2+bc$

$(\because \cos 3\theta \leq \cos 120° = -\frac{1}{2})$

$\therefore$ 只需證 $2ak+k^2 \geq bc$。

事實上，我們可以證明 $2ak \geq bc$ 如下：

在 ΔADE 中，由正弦定理

$$\Rightarrow \frac{\overline{DE}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AE}}{\sin(\theta+\alpha)} \quad \text{——} \quad ①$$

在 ΔACE 中，由正弦定理

$$\Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\sin\beta}=\frac{\overline{AC}}{\sin(\pi-\theta-\beta)}=\frac{\overline{AC}}{\sin(\theta+\beta)} \quad \text{——} \quad ②$$

而 $\overline{AC}=2R\sin\alpha=b$

$\Rightarrow$ 由①②

$$\Rightarrow k=\overline{DE}=\frac{\sin\theta\sin\beta\cdot\overline{AC}}{\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)}$$

又有 $c=2R\sin\beta$， $a=2R\sin 3\theta$

$$\therefore\ 2ak\ge bc \quad \Leftrightarrow\ 2\cdot\frac{b\sin\theta\sin\beta}{\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)}\cdot 2R\sin 3\theta\ge 2bR\sin\beta$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{2\sin\theta\sin 3\theta}{\sin(\theta+\alpha)\sin(\theta+\beta)}\ge 1$$

而事實上可以證

$2\sin\theta\sin 3\theta\ge 1$

$\Leftrightarrow \cos 2\theta-\cos 4\theta\ge 1$ (積化和差)

$\Leftrightarrow \cos 2\theta-2\cos^2 2\theta+1\ge 1$

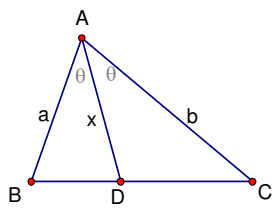
$\Leftrightarrow \cos 2\theta(1-2\cos 2\theta)\ge 0$

而 $\because 40^\circ\le\theta\le 45^\circ\Rightarrow 80^\circ\le 2\theta\le 90^\circ$

故上式成立，即得到 $\overline{BC}+\overline{DE}\ge\overline{AB}+\overline{AC}$ 。

另一方面，我們需要以下的引理：

【引理】 若 $\overline{AD}$ 爲銳角 ΔABC 之角平分線，則有 $\overline{AB}+\overline{AC}\ge 2\overline{AD}$ 。



【證】

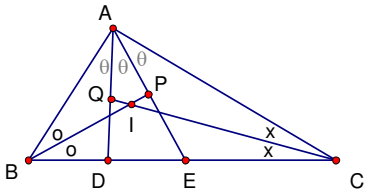
由 $\Delta ABD+\Delta ACD=\Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AD}\sin\theta+\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AD}\sin\theta=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin 2\theta$$

$$\Rightarrow \overline{AD}=\frac{2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos\theta}{\overline{AB}+\overline{AC}}\le\frac{2\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\overline{AB}+\overline{AC}}\le\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})$$

$\therefore\ \overline{AB}+\overline{AC}\ge 2\overline{AD}$ 。

回到原題：



$$\overline{BC}+\overline{DE}=\overline{BE}+\overline{CD}$$

$$\geq \frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})+\frac{1}{2}(\overline{BE}+\overline{CD}) \quad (\text{由 } \overline{BC}+\overline{DE}\geq\overline{AB}+\overline{AC})$$

$$=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BE})+\frac{1}{2}(\overline{AC}+\overline{CD})$$

$$\geq \overline{BP}+\overline{CQ} \quad \text{。} \quad (\text{由引理得})$$

100學年度高級中學數學能力競賽決賽

筆試試題（二）

注意事項：

（1）時間：2 小時（16:00～18:00）
（2）配分：每題皆為 35 分
（3）不可使用計算器
（4）請將答案依序寫在答案卷內

一、設 O 為銳角 ΔABC 外接圓的圓心，直線 $\overleftrightarrow{AO}$ 交 $\overline{BC}$ 邊於一點 D，分別在邊 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AC}$ 上各取一點 E,F，使得 $\overline{ED}=\overline{BD}$ 及 $\overline{DF}=\overline{CD}$，試證：$\overline{EF}\,//\,\overline{BC}$。

二、設 $f(x)$ 為首項係數等於 1 的四次實係數多項式。假設 $f(\alpha)=f(\beta)=0\ \ (\alpha\neq\beta)$，但對所有其他的實數 $\gamma\,(\gamma\neq\alpha,\beta)$，恆有 $f(\gamma)>0$。試證：若 $\alpha\le x\le\beta$ 且 $x\neq\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，則 $f(x)<f(\dfrac{\alpha+\beta}{2})$。

三、已知有身高都不一樣的 n 個人（$n\ge 2$），將這 n 個人排成一排，而且任選 3 個人，如果這 3 個人之中身高第二高的人所站的位置在最矮的人所站的位置之前時，則這 3 個人之中身高最高的人所站的位置必須介於另外兩個人所站位置之間的某個位置，請問滿足上述條件的排列方法共有幾種？

100學年度高級中學數學能力競賽決賽

筆試試題（二）參考解答

注意事項：

（1）時間：2 小時（16:00～18:00）
（2）配分：每題皆為 35 分
（3）不可使用計算器
（4）請將答案依序寫在答案卷內

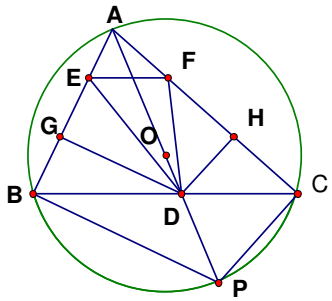
一、設 O 為銳角 ΔABC 外接圓的圓心，直線 $\overleftrightarrow{AO}$ 交 $\overline{BC}$ 邊於一點 D，分別在邊 $\overline{AB}$ 及 $\overline{AC}$ 上各取一點 E,F，使得 $\overline{ED}=\overline{BD}$ 及 $\overline{DF}=\overline{CD}$，試證：$\overline{EF}\,//\,\overline{BC}$。

【參考解答】:

1.如圖，自 D 點分別作邊 $\overline{BE}$ 及 $\overline{CF}$ 的高，分別交 $\overline{BE}$ 及 $\overline{CF}$ 於點 G 及 H，

作直線 $\overleftrightarrow{AO}$ 交圓 O 於 P，所以 $\overline{AP}$ 爲圓 O 的直徑，因此

$\angle ABP=90^\circ=\angle ACP$。



2.因爲 $\Delta AGD\sim\Delta ABP$ 及 $\Delta AHD\sim\Delta ACP$，所以 $\dfrac{\overline{AG}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AP}}=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AC}}$，

因此 $\Delta AGH\sim\Delta ABC$，

故 $\overline{GH}\,//\,\overline{BC}$。

3.因爲 $\overline{ED}=\overline{BD}$ 及 $\overline{DF}=\overline{CD}$，所以 $\overline{BG}=\overline{GE}$ 及 $\overline{CH}=\overline{HF}$。連 $\overline{CE}$ 交 $\overline{GH}$ 於 M 點，因 $\overline{GH}\,//\,\overline{BC}$，所以 $\overline{GM}\,//\,\overline{BC}$，則 $\overline{EM}=\overline{MC}$，又 $\overline{CH}=\overline{HF}$，故 $\overline{EF}\,//\,\overline{MH}$，

因此 $\overline{EF}\,//\,\overline{BC}$。

二、設 $f(x)$ 為首項係數等於 1 的四次實係數多項式。假設 $f(\alpha)=f(\beta)=0\ \ (\alpha\neq\beta)$，但對所有其他的實數 $\gamma\,(\gamma\neq\alpha,\beta)$，恆有 $f(\gamma)>0$。

試證：若 $\alpha \le x \le \beta$ 且 $x \ne \frac{\alpha+\beta}{2}$ ，則 $f(x) < f(\frac{\alpha+\beta}{2})$ 。

【參考解答】:

證：不失一般性，可假設 $\alpha < \beta$ 。表 $f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x^2+bx+c)$ 。

(1) 若 $b^2-4c<0$ ，則 x^2+bx+c 恆正；當 $\alpha<\gamma<\beta$ 時，

$f(\gamma) = (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma^2+b\gamma+c) < 0$ ，矛盾。

(2) 若 $b^2-4c \ge 0$ ，則 $x^2+bx+c=0$ 有實數解。故 $x^2+bx+c=(x-\alpha)^2$ 或 $(x-\beta)^2$ 或 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 。若 $x^2+bx+c=(x-\alpha)^2$ ，則 $f(x)=(x-\alpha)^3(x-\beta)$ ；當 $\alpha<\gamma<\beta$ 時，

$f(\gamma)=(\gamma-\alpha)^3(\gamma-\beta)<0$ ，矛盾。同理， $x^2+bx+c=(x-\beta)^2$ 的情況亦不會發生。

故 $x^2+bx+c=(x-\alpha)(x-\beta)$ 。因此 $f(x)=((x-\alpha)(x-\beta))^2$ 。

當 $\alpha \le x \le \beta$ 時，由算幾不等式得 $\frac{(x-\alpha)+(\beta-x)}{2} \ge \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$ ，即

$\frac{\beta-\alpha}{2} \ge \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$ 。因 $f(\frac{\alpha+\beta}{2}) = (\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha)^2(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta)^2 = (\frac{\beta-\alpha}{2})^4$ ，故

$f(\frac{\alpha+\beta}{2}) \ge (x-\alpha)^2(\beta-x)^2 = f(x)$ ，其中等號成立的充要條件爲 $x-\alpha=\beta-x$ ，即 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ 。

三、已知有身高都不一樣的 n 個人($n \ge 2$)，將這 n 個人排成一排，而且任選 3 個人，如果這 3 個人之中身高第二高的人所站的位置在最矮的人所站的位置之前時，則這 3 個人之中身高最高的人所站的位置必須介於另外兩個人所站位置之間的某個位置，請問滿足上述條件的排列方法共有幾種？

【參考解答】:

引理 滿足條件的排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 中至多有一個 descent.

(i 是 descent 的意思是指 $a_i > a_{i+1}$)

解: 如果 i, j 都是 descent($i \ne j$)

(i) $a_i > a_j$ 取 a_i, a_j, a_{j+1} 這 3 個人的身高是 $a_i > a_j > a_{j+1}$ 所以不滿足條件

(ii) $a_i < a_j$ 取 a_i, a_{i+1}, a_j 這 3 個人的身高是 $a_j > a_i > a_{i+1}$ 所以不滿足條件 。

解 $1+\binom{n}{2}$

令這 n 個人身高從矮到高編號爲 $1,2,3,\cdots,n$

當 $n=3$ 時有 4 種排法

$123,132,231,312$

假設 $n=k$ 時排法共有 $1+\binom{k}{2}$ 種

當 $n=k+1$ 時

先將 $1,2,3,\cdots,k$ 先排好，令爲 $a_1a_2\cdots a_k$ 滿足條件，由引理知它最多有 1 個 descent.

(i) $a_1a_2\cdots a_k$ 沒有 descent 則 $k+1$ 可以放入任何位置，所以有 $k+1$ 種排法。

(ii) $a_1a_2\cdots a_k$ 有一個 descent 令其爲 i，則 $k+1$ 必須放在 a_i 及 a_{i+1} 之間，所以只有唯一放法，總共有 $k+1+\binom{k}{2}=1+\binom{k+1}{2}$。

由數學歸納法得知有 $1+\binom{n}{2}$ 種排法。

柒、 口試試題及參考解答

100學年度高級中學數學能力競賽決賽

口 試 試 題

注意事項：

(1) 試卷共 2 題，參賽者可先在本試卷上作答，思考時間 20 分鐘；
(2) 攜帶本試卷到口試 A 組應試，答辯時間 20 分鐘，並繳回本試卷；
(3) 口試 A 組答辯結束後，到口試 B 組繼續應試，答辯時間 20 分鐘。

一、ΔABC 中 D、E 兩點分別為兩邊 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 上的點，使得 $\overline{DE} // \overline{BC}$，又 P 點為線段 $\overline{DE}$ 上任意一點，使得直線 CP 交線段 AB 於 R 點，直線 BP 交線段 AC 於 Q 點。試證 $\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{CQ}}+\dfrac{\overline{AR}}{\overline{BR}}$ 之值必為一定數，並求此定數。

二、設方陣 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，試求最小的正整數 n，使得方陣 A^n 之任一非 0 之元素 a_n，恆有 $\log_2|a_n|>100$。

100學年度高級中學數學能力競賽決賽

口 試 試 題 參考解答

注意事項：

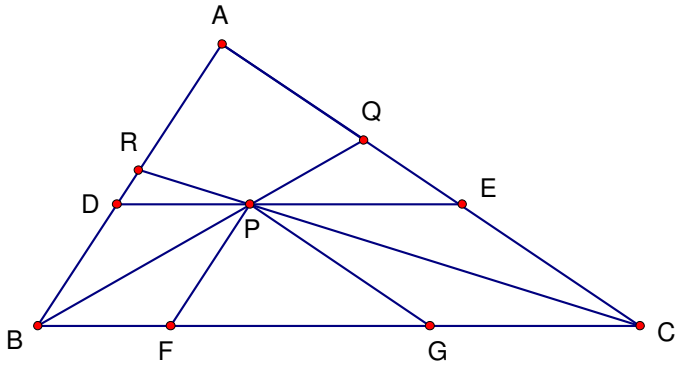
(1) 試卷共 2 題，參賽者可先在本試卷上作答，思考時間 20 分鐘；

(2) 攜帶本試卷到口試 A 組應試，答辯時間 20 分鐘，並繳回本試卷；

(3) 口試 A 組答辯結束後，到口試 B 組繼續應試，答辯時間 20 分鐘。

一、ΔABC 中 D、E 兩點分別為兩邊 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 上的點，使得 $\overline{DE}//\overline{BC}$，又 P 點為線段 $\overline{DE}$ 上任意一點，使得直線 CP 交線段 AB 於 R 點，直線 BP 交線段 AC 於 Q 點。試證 $\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{CQ}}+\dfrac{\overline{AR}}{\overline{BR}}$ 之值必為一定數，並求此定數。

【參考解答】(一)：



F, G 兩點在線段 BC 上，滿足

線段 PF//線段 AB, 線段 PG//線段 AC，

PF = DB, PG = EC.

設 $\overline{AB}$ = k $\overline{BD}$，因 DE // BC，

所以 $\overline{AC}$ = k $\overline{EC}$。

$\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{CQ}}=\dfrac{\overline{AC}-\overline{CQ}}{\overline{CQ}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CQ}}-1$，同理，$\dfrac{\overline{AR}}{\overline{BR}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BR}}-1$。

由 ΔBCQ 相似於 ΔBGP，得 $\dfrac{\overline{PG}}{\overline{CQ}}=\dfrac{\overline{BG}}{\overline{BC}}$。

$\dfrac{\overline{BG}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{PG}}{\overline{CQ}}=\dfrac{\overline{EC}}{\overline{CQ}}=\dfrac{\frac{1}{k}\overline{AC}}{\overline{CQ}}=\dfrac{\overline{AC}}{k\,\overline{CQ}}$。

同理，$\dfrac{\overline{CF}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{PF}}{\overline{BR}}=\dfrac{\overline{AB}}{k\,\overline{BR}}$。

由 ΔABC 相似於 ΔPFG、PF = DB 及 $\overline{AB}$ = k $\overline{BD}$，可得 $\overline{BC}$ = k $\overline{FG}$。

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{CF}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BC}+\overline{FG}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BC}+\frac{1}{k}\overline{BC}}{\overline{BC}}=1+\frac{1}{k}$$ 。

又 $\frac{\overline{BG}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{CF}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AC}}{k\overline{CQ}}+\frac{\overline{AB}}{k\overline{BR}}=1+\frac{1}{k}$

因此，$\frac{\overline{AC}}{\overline{CQ}}+\frac{\overline{AB}}{\overline{BR}}=k+1$

又 $\frac{\overline{AQ}}{\overline{CQ}}+\frac{\overline{AR}}{\overline{BR}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CQ}}+\frac{\overline{AB}}{\overline{BR}}-2=k+1-2=k-1$ 。

【參考解答】(二)

作$\overline{AP}$交BC於點T，利用商氏定理

$\frac{AR}{BR}\bullet\frac{BC}{CT}\bullet\frac{TP}{AP}=1$ (看$\triangle ABT$)

$\frac{AQ}{CQ}\bullet\frac{BC}{BT}\bullet\frac{TP}{AP}=1$ (看$\triangle ACT$)

所以(看$\frac{AR}{BR}+\frac{AQ}{CQ}=\frac{AP}{BC}(\frac{CT+BT}{TP})=\frac{AP}{TP}=\frac{AD}{BD}$)

【參考解答】(三)

過$\overline{AP}$交BC於點T

$\frac{AR}{BR}=\frac{\triangle APB}{\triangle BPC},\frac{AQ}{CQ}=\frac{\triangle ACP}{\triangle BPC}$

所以$\frac{AR}{BR}+\frac{AQ}{CQ}=\frac{\triangle APB+\triangle APC}{\triangle BPC}=\frac{AP}{TP}=\frac{AD}{BD}$

二、設方陣$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&2&0\\-2&1&3\end{bmatrix}$，試求最小的正整數 n，使得方陣$A^n$之任一非 0 之元素$a_n$，恆有$\log_2|a_n|>100$。

【參考解答】：依自乘數次可發現(並用數學歸納法證之)

$$A^n = \begin{bmatrix} -(2^n-2) & 2^n-1 & 2^n-1 \\ 0 & 2^n & 0 \\ -(2^{n+1}-2) & 2^n-1 & 2^{n+1}-1 \end{bmatrix} \quad n \geq 1$$

非 0 元的絕對值$|a_n|$最小爲2^n-2

可令$\log_2 |2^n-2| > 100$

故　$2^n - 2 > 2^{100}$

$2^n > 2^{100} + 2$

n 之最小正整數爲 101

注：本題重點在求方陣 A^n 之規律

捌、 獨立研究試題及參考解答

100學年度高級中學數學能力競賽決賽

獨立研究試題（一）

注意事項：

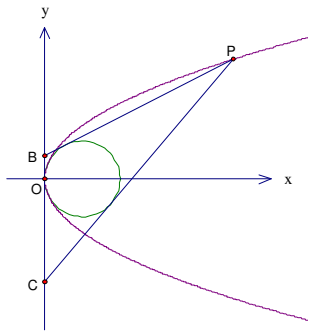
(1) 三題中自選兩題作答，並請註明題號。
(2) 時間：2 小時（8:00～10:00）
(3) 配分：每題皆為 7 分
(4) 不可使用計算器，請將答案寫在答案卷內。

一、設 $a,\ b$ 為正整數，試求滿足

$$4\times 13^{a}-25\times 3^{b}=1$$

的所有序對 (a,b)。

二、如下圖，P 是拋物線 $y^2=2x$ 上的動點，點 B、C 在 y 軸上，圓 $(x-1)^2+y^2=1$ 內切於ΔPBC，試求ΔPBC 面積的最小值。



三、由 0,1 排成長度 n 的字串，稱為**二元 n 字串**。若一個二元 n 字串中出現字串 00 與 11 的個數一樣多，則稱為**長度 n 的二元平衡字串**，例如：長度 5 的二元平衡字串共有以下 6 種：10101,01010,01100,10011,00110,11001。(11000 不是二元平衡字串，因為有一組11，有 2 組 00)。若以 a_n 表示長度 n 的二元平衡字串之個數，則已經知道 $a_1=a_2=a_3=2, a_4=4, a_5=6$。

(1) 試列出所有長度 6 的二元平衡字串，並求 a_6 之值。

(2) 試求 a_n 的一般公式。

100學年度高級中學數學能力競賽決賽

獨立研究試題（一）參考解答

注意事項：

(1) 三題中自選兩題作答，並請註明題號。
(2) 時間：2 小時（8:00～10:00）
(3) 配分：每題皆為 7 分
(4) 不可使用計算器，請將答案寫在答案卷內。

一、設 $a,\ b$ 為正整數，試求滿足

$$4\times 13^{a}-25\times 3^{b}=1$$

的所有序對 (a,b)。

【參考解答】：

若 (a,b) 滿足 $4(13^{a})-25(3^{b})=1$，則 $4(13^{a})-1$ 爲 5 的倍數。因 $4(13^{a})-1=(5-1)(10+3)^{a}-1$，故 $3^{a}+1$ 爲 5 的倍數。對於一般的整數 c，表 $r(c)$ 爲 3^{c} 除以 5 所得的餘數，則 $r(0)=1$，$r(1)=3$，$r(2)=4$，$r(3)=2$，$r(4)=1$；若 k 爲非負的整數，則 $r(c+4k)=r(c)$。因此 $a=2+4k$，其中 k 爲某一非負的整數，從而得

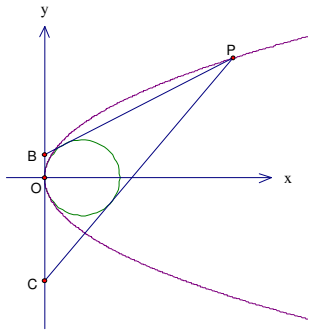
$25(3^{b})=4(13^{a})-1=4(13^{2+4k})-1=26^{2}13^{4k}-1=(26*13^{2k}+1)(26*13^{2k}-1)$.

因 $26*13^{2k}+1$ 與 $26*13^{2k}-1$ 互質，得 $26*13^{2k}\pm 1=3^{b}$，$26*13^{2k}\mp 1=25$。但 $26*13^{2k}-1$ 除以 3 的餘數爲 1，不合，故 $26*13^{2k}+1=3^{b}$，$26*13^{2k}-1=25$。由此解出 $k=0$，$a=2$，$b=3$。最後檢驗 $4(13^{2})-25(3^{3})=676-675=1$，故 $(a,b)=(2,3)$ 爲所求。

二、如下圖，P 是拋物線 $y^{2}=2x$ 上的動點，點 B、C 在 y 軸上，

圓 $(x-1)^{2}+y^{2}=1$ 內切於ΔPBC，試求ΔPBC 面積的最小值。

【參考解答】：設 p 的坐標爲(α,β),B 的坐標爲(0,b),C 的坐標爲(0,c),並設 b>c,



直線 PB 方程式爲 $y-b=\dfrac{\beta-b}{\alpha}(x-0)$

$\Rightarrow(\beta-b)x-\alpha y+\alpha b=0$ .....(1)

直線 PC 方程式爲 $y-c=\dfrac{\beta-c}{\alpha}(x-0)$

$\Rightarrow(\beta-c)x-\alpha y+\alpha c=0$ .....(2)

因圓心(1,0)到直線 PB 的距離爲 1,由(1)而有

$$\frac{|\beta-b+\alpha b|}{\sqrt{(\beta-b)^{2}+\alpha^{2}}}=1$$

$\Rightarrow (\beta-b)^2+\alpha^2=(\beta-b)^2+2\alpha b(\beta-b)+\alpha^2b^2$,由於 α>2,上式可簡化爲

$$(\alpha-2)b^2+2\beta b-\alpha=0$$

同理由(2)可得 $(\alpha-2)c^2+2\beta c-\alpha=0$

於是, $b+c=\dfrac{-2\beta}{\alpha-2}, bc=\dfrac{-\alpha}{\alpha-2} \quad \Rightarrow (b-c)^2=\dfrac{4\alpha^2+4\beta^2-8\alpha}{(\alpha-2)^2}$

因爲 $P(\alpha,\beta)$ 在拋物線上,所以 $\beta^2=2\alpha \quad \Rightarrow (b-c)^2=\dfrac{4\alpha^2}{(\alpha-2)^2} \Rightarrow b-c=\dfrac{2\alpha}{\alpha-2}$

故 ΔPBC 的面積 $S=\dfrac{1}{2}(b-c)\alpha=\dfrac{\alpha}{\alpha-2}\times\alpha=\dfrac{\alpha^2}{\alpha-2} \quad \Rightarrow \alpha^2-S\alpha+2S=0$

由判別式 $S^2-8S\geq 0 \Rightarrow S\geq 8$;求得 ΔPBC 面積的最小值爲 8.

三、由 0,1 排成長度 n 的字串，稱為**二元 n 字串**。若一個二元 n 字串中出現字串 00 與 11 的個數一樣多，則稱為**長度 n 的二元平衡字串**，例如：長度 5 的二元平衡字串共有以下 6 種：10101,01010,01100,10011,00110,11001。(11000 不是二元平衡字串，因為有一組11，有 2 組 00)。若以 a_n 表示長度 n 的二元平衡字串之個數，則已經知道 $a_1=a_2=a_3=2, a_4=4, a_5=6$。

(1) 試列出所有長度 6 的二元平衡字串，並求 a_6 之值。

(2) 試求 a_n 的一般公式。

【參考解答】

(1) 長度 6 的二元平衡字串共有以下 12 種：

101010,010101,110100,001011,101100,010011

011001,100110,001101,110010,111000,000111

故 $a_6=12$。

(2) 顯然，$a_1=2, a_2=2$。以下證明：$a_n=2C^{n-2}_{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1}$ $(n=3,4,5,\cdots)$。

對長度 n 的平衡二元字串 $x_1x_2\cdots x_n$，設其中出現 0 的有 ℓ 組，而第 i 組 0 的個數爲 p_i $(i=1,2,\cdots,\ell)$，出現 1 的有 m 組，而第 j 組 1 的個數爲 q_j $(j=1,2,\cdots,m)$。則由已知條件，可得

$$\sum_{i=1}^{\ell}(p_i-1)=\sum_{j=1}^{m}(q_j-1),$$

若令 $p=\sum_{i=1}^{\ell}p_i, q=\sum_{j=1}^{m}q_j$，則可推得 $p-q=\ell-m$。

(i) 當 $x_1\neq x_n$ 時 (例如：00011011)，$\ell=m$，即 $p=q$，此時 n 爲偶數。

(ii) 當 $x_1 = x_n = 0$ 時 (例如：000110110)，$\ell = m + 1$，即 $p = q + 1$，此時 n 爲奇數。

(iii) 當 $x_1 = x_n = 1$ 時 (例如：100011011)，$\ell = m - 1$，即 $p = q - 1$，此時 n 爲奇數。

因此，當 n 爲偶數時，$(x_1, x_n) = (0, 1)$ 或 $(1, 0)$，而在其餘 $x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}$ 的 $n - 2$ 個位置就得排 $\frac{n-2}{2}$ 個 0 及 $\frac{n-2}{2}$ 個 1，此排法有 $C^{n-2}_{\frac{n-2}{2}}$ 種；故當 n 爲偶數時，有 $2C^{n-2}_{\frac{n-2}{2}} = 2C^{n-2}_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1}$ 種排法。

當 n 爲奇數時，若 $(x_1, x_n) = (0, 0)$，則在其餘 $x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}$ 的 $n - 2$ 個位置就得排 $\frac{n-3}{2}$ 個 0 及 $\frac{n-1}{2}$ 個 1，此排法有 $C^{n-2}_{\frac{n-3}{2}}$ 種。若 $(x_1, x_n) = (1, 1)$，則在其餘 $x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}$ 的 $n - 2$ 個位置就得排 $\frac{n-1}{2}$ 個 0 及 $\frac{n-3}{2}$ 個 1，此排法有 $C^{n-2}_{\frac{n-1}{2}}$ 種。故當 n 爲奇數時，也有 $C^{n-2}_{\frac{n-1}{2}} + C^{n-2}_{\frac{n-3}{2}} = 2C^{n-2}_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1}$ 種排法。

因此，$a_n = \begin{cases} 2, & \text{當 } n = 1 \\ 2, & \text{當 } n = 2 \\ 2C^{n-2}_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1}, & \text{當 } n \geq 3 \end{cases}$。

100學年度高級中學數學能力競賽決賽

獨立研究試題（二）

注意事項：

（1）三題中自選兩題作答，並請註明題號
（2）時間：2 小時（10:10～12:10）
（3）配分：每題皆為 7 分
（4）不可使用計算器
（5）請將答案寫在答案卷內

一、設 $a,\ k$ 是正整數，$a \geq 2$，證明：存在一個正整數 n，使得 a^n 和 $a^k - k + 1$ 除以 $a^k + 1$ 有相同的餘數之充分必要條件為存在整數 $r \geq 0$，使得 $k = a^r$。

二、設 a,b,c 為實數，若 a,b,c 的某一種排列形成算術數列（即等差數列），則稱 $\{a,b,c\}$ 為算術組合。證明任意五個相異數 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 中必存在一種排列，使得任何相鄰的三個數皆不為算術組合。（例如數列 $7,2,6,4,1$ 中的 $\{7,2,6\}$，$\{6,4,1\}$ 皆不為算術組合，但 $\{2,6,4\}$ 是算術組合）。

三、

（1）試找出一組實數 a，b 使得

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{a^3+b^3}{2}$$

不成立 。

（2）證明：對於任意實數 a，b，下列不等式恆成立：

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\cdot\frac{a^6+b^6}{2} \leq \frac{a^{10}+b^{10}}{2}$$ 。

100學年度高級中學數學能力競賽決賽
獨立研究試題（二）參考解答

注意事項：

（1）三題中自選兩題作答，並請註明題號
（2）時間：2 小時（10:10～12:10）
（3）配分：每題皆為 7 分
（4）不可使用計算器
（5）請將答案寫在答案卷內

一、設 a, k 是正整數，$a \geq 2$，證明：存在一個正整數 n，使得 a^n 和 $a^k - k + 1$ 除以 $a^k + 1$ 有相同的餘數之充分必要條件為存在整數 $r \geq 0$，使得 $k = a^r$。

【參考解答】

證：假設 $k = a^r$，$r \geq 0$

由 $a^k \equiv -1 (\text{mod } a^k + 1)$

得 $a^r \cdot a^k \equiv -a^r (\text{mod } a^k + 1)$

即 $a^{r+k} \equiv -k (\text{mod } a^k + 1)$

設 $n = r + k$，則 $a^n = a^{r+k} \equiv -k \equiv a^k + 1 - k (\text{mod } a^k + 1)$

反之，假設存在正整數 n，使得 a^n 和 $a^k - k + 1$ 除以 $a^k + 1$ 有相同的餘數，

則 $a^n \equiv a^k - k + 1 \equiv -k (\text{mod } a^k + 1)$

令 $n = qk + r$，其中 q, r 是非負整數且 $0 \leq r < k$

則 $a^n = a^{qk+r} \equiv (-1)^q \cdot a^r \equiv \pm a^r (\text{mod } a^k + 1)$

得 $k \equiv \mp a^r (\text{mod } a^k + 1)$

若 $k = a^r (\text{mod } a^k + 1)$，由 $1 \leq k$，$a^r \leq a^k$，則 $k = a^r$

若 $k = -a^r (\text{mod } a^k + 1)$，則 $k = a^k - a^r + 1$

但 $a^k = a \cdot a^{k-1} \geq 2a^{k-1} \geq a^r + a^{k-1} > a^r + k - 1$

則 $k < a^k - a^r + 1$，矛盾

因此，$k = a^r$

二、設 a,b,c 為實數，若 a,b,c 的某一種排列形成算術數列（即等差數列），則稱 $\{a,b,c\}$ 為算術組合。證明任意五個相異數 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 中必存在一種排列，使得任何相鄰的三個數皆不為算術組合。（例如數列 $7,2,6,4,1$ 中的 $\{7,2,6\}$，$\{6,4,1\}$ 皆不為算術組合，但 $\{2,6,4\}$ 是算術組合）。

【參考解答】

設 5 個數由小到大排列為 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5。

<u>Case 1.</u> $\{a_2,a_3,a_4\}$不是算術組合。

若$\{a_1,a_2,a_3\}$是算術組合，則a_5,a_1,a_2,a_4,a_3滿足所求。事實上，$\{a_5,a_1,a_2\}$和$\{a_1,a_2,a_4\}$皆不為算術組合。

同理，若$\{a_3,a_4,a_5\}$為算術組合，則a_3,a_2,a_4,a_5,a_1符合所求。

最後，若$\{a_1,a_2,a_3\}$和$\{a_3,a_4,a_5\}$皆不為算術組合，則a_1,a_2,a_3,a_4,a_5符合所求。

<u>Case 2.</u> $\{a_2,a_3,a_4\}$是算術組合.

若$\{a_1,a_2,a_3\}$是算術組合，則a_4,a_1,a_2,a_5,a_3符合所求。

同理，若$\{a_3,a_4,a_5\}$是算術組合，則a_2,a_5,a_4,a_1,a_3符合所求。

最後，若$\{a_1,a_2,a_3\}$和$\{a_3,a_4,a_5\}$皆不為算術組合，則a_2,a_1,a_3,a_4,a_5符合所求。

綜合以上討論知：存在一種排列滿足所求。

三、

(1) 試找出一組實數 a, b 使得

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\le\frac{a^3+b^3}{2}$$

不成立 。

(2) 證明: 對於任意實數 a, b, 下列不等式**恆**成立:

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\cdot\frac{a^6+b^6}{2}\le\frac{a^{10}+b^{10}}{2}$$ 。

【參考解答】

(1)

a, b 爲任意實數, $\boxed{\text{m, n 爲奇偶性相同的自然數}}$, 下列不等式成立:

$$\frac{a^m+b^m}{2}\cdot\frac{a^n+b^n}{2}\le\frac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2}$$

$$0\le 2(a^{m+n}+b^{m+n})-(a^m+b^m)(a^n+b^n)$$

$$0\le(a^m-b^m)(a^n-b^n)$$

(a) m,n 同爲奇數

若 $a \ge b$，則 $a^m \ge b^m, a^n \ge b^n \Rightarrow 0 \le (a^m - b^m)(a^n - b^n)$

若 $a < b$，則 $a^m < b^m, a^n < b^n \Rightarrow 0 \le (a^m - b^m)(a^n - b^n)$

(b) m,n 同爲偶數，考慮 m=2s, n=2t

若 $a^2 \ge b^2$，則 $(a^2)^s \ge (b^2)^s, (a^2)^t \ge (b^2)^t \Rightarrow$

$a^m \ge b^m, a^n \ge b^n \Rightarrow 0 \le (a^m - b^m)(a^n - b^n)$

若 $a^2 < b^2$，則 $(a^2)^s < (b^2)^s, (a^2)^t < (b^2)^t \Rightarrow$

$a^m < b^m, a^n < b^n \Rightarrow 0 \le (a^m - b^m)(a^n - b^n)$

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \le \frac{a^4+b^4}{2}, \quad \frac{a^4+b^4}{2} \cdot \frac{a^6+b^6}{2} \le \frac{a^{10}+b^{10}}{2}$$

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \cdot \frac{a^6+b^6}{2} \le \frac{a^{10}+b^{10}}{2}$$

(2) a=1, b= -3

$$\frac{1+(-3)}{2} \cdot \frac{1^2+(-3)^2}{2} = -5 > \frac{1^3+(-3)^3}{2} = -13$$