2008TCFSH 教甄參考解答

1. $\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7}\sin\frac{9\pi}{7}=-\sqrt{\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7}}=-\sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}}=-\frac{\sqrt{7}}{8}$ #

2.千百個十 $8\times9\times2\times3=432$ #

3.點 P 在以 $\overline{AB}$ 為直徑的球上，圓心 $C(2,3,6), R=3$ ，故 $\overline{OP}\le\overline{OC}+R=7+3=10$ #

4.點 $A(0,4)$ 對切線作對稱點 $A'(4,8)$ ， $B(10,0)$ ，

$2a=\overline{A'B}=10$ ， $2c=\overline{AB}=2\sqrt{29}$ ，正焦弦長 $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(c^2-a^2)}{a}=\frac{8}{5}$ #

5. $f'\cdot g'\cdot h'=2\cdot((x^2+2)-1)\cdot 2x=4x^3+4x$ #

6. $\frac{\cot A+\cot B}{\cot C}=\frac{\sin^2 C}{\sin A\, sinB}\cdot\frac{1}{\cos C}=\frac{c^2}{ab}\frac{2ab}{a^2+b^2-c^2}=\frac{18c^2}{9a^2+9b^2-9c^2}=\frac{18c^2}{8c^2}=\frac{9}{4}$ #

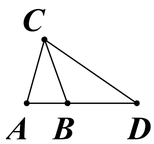
7. $n^2a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_n+\sum_{k=1}^{n-1}a_k=a_n+(n-1)^2a_{n-1}$ ， $a_n=\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}$ ， $a_{2008}=\frac{2}{2009}$ #

8.(1)0,1,4,27,256,1045,2916#
(2)1,3,23,229,789,1871
(3)2,20,206,560,1082
(4)18,186,354,522
(5)168,168,168

9.設 $u=\sqrt[4]{16-x}, v=\sqrt[4]{1+x}$ ， $u+v=3$ ， $u^4+v^4=((u+v)^2-2uv)^2-2u^2v^2=17$ ，
$u^2v^2-18uv+32=0$ ， $uv=2$ ， $x=0\vee 15$ #

10.如圖，在 $\overrightarrow{AB}$ 上取 $\overline{BD}=\overline{BC}$ ， $\overline{AC}^2=\overline{AB}\cdot\overline{AD}\Rightarrow\Delta ABC\approx\Delta ACD$

$\Rightarrow\angle ABC=2\angle ACB$ $\therefore$ $\angle ABC=\frac{2}{3}(180^o-\angle BAC)=70^o$ #




11.CDEF 四點共圓 $\Rightarrow\frac{\overline{CE}}{\sin\angle CDE}=\frac{\overline{CF}}{\sin\angle CDF}$ ， $\overline{CE}=\overline{CF}\Rightarrow\angle CDF=150^o$

$\therefore$ $\angle ACE=20^o$ #

12. $\begin{cases}(3a^2+b^2)(a^2+3b^2)=\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}\\ 2(b^4-a^4)=\frac{1}{a}-\frac{1}{2b}\end{cases}$ 相加減$\Rightarrow$ $\begin{cases}a^4+10a^2b^2+5b^4=\frac{2}{a}\\ 5a^4+10a^2b^2+b^4=\frac{1}{b}\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a^5+10a^3b^2+5ab^4=2\\ 5a^4b+10a^2b^3+b^5=1\end{cases}$ 相加減$\Rightarrow$ $\begin{cases}(a+b)^5=3\\ (a-b)^5=1\end{cases}\Rightarrow a=\frac{\sqrt[5]{3}+1}{2}, b=\frac{\sqrt[5]{3}-1}{2}$ #

13. $a+b+c=24$ ， $a,b,c\geq 5 \Rightarrow \dfrac{24\cdot H_9^3}{3}=440$ #

14. $E=(2008-3)\cdot\dfrac{3}{3+1}+3=\dfrac{6027}{4}$ #

15. $X^4+\dfrac{8}{3}X^3+X^2+\dfrac{8}{3}X+I=0$ 乘 $X^{-1}$ 二次 $\Rightarrow (X+X^{-1})^2+\dfrac{8}{3}(X+X^{-1})-I=0 \Rightarrow Y^2+\dfrac{8}{3}Y-I=0$

$Y=\begin{bmatrix}2\cos\theta & 0\\ 0 & 2\cos\theta\end{bmatrix}=2\cos\theta\cdot I \Rightarrow 4\cos^2\theta+\dfrac{16}{3}\cos\theta-1=0 \Rightarrow p=\dfrac{8}{3}, q=-1, \cos\theta=\dfrac{1}{6}$ #

16. $2008_{10}=5566_7$ ， $1234_{10}=3412_7$ ， $C^5_3\cdot C^5_4\cdot C^6_1\cdot C^6_2=4500\equiv 6\,(mod\ 7)$ #

17. $C_n=\dfrac{2\cdot(3n)!}{n!\cdot(n+1)!\cdot(n+2)!}$ ， $C_4=\dfrac{2\cdot 12!}{4!\cdot 5!\cdot 6!}=462$ #

18. $y=f(x)=a^x$ 與 $y=g(x)=\log_a x$ 對稱於 $y=x$ ，如圖，

臨界於公切線斜率 $=-1$ ， $a^t=t=\log_a t$ 且 $f'(t)=a^t\ln a=-1$ ，

將 $a^t=t$ 代入 $f'(t)=-1 \Rightarrow t=\dfrac{-1}{\ln a}$

將 $t=\dfrac{-1}{\ln a}$ 代入 $t=\log_a t \Rightarrow \dfrac{-1}{\ln a}=\log_a t=\dfrac{\ln t}{\ln a} \Rightarrow t=\dfrac{1}{e}$

$t=\dfrac{-1}{\ln a}=\dfrac{1}{e} \Rightarrow t=e^{-e}$ ∴ $0<a<e^{-e}$ #