

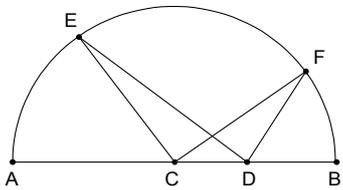
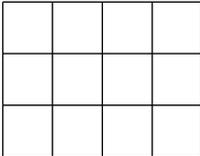
國立臺中第一高級中學 97 學年度第一次教師甄選數學科試題

所有題目皆為計算題，請作答於答案卷上，並寫出計算過程，無過程則該題不計分。答錯不倒扣。

第一部分(每題五分)

1. 求 $\sin \frac{3\pi}{7} \sin \frac{6\pi}{7} \sin \frac{9\pi}{7}$ 之值。
2. 從 $\{1,2,4,5,6,7,8,9,0\}$ 選出四個數字(可重複)所排列成的四位正整數之中，有幾個為 15 的倍數。
3. 空間中 $O(0,0,0)$ ， $A(0,2,4)$ ， $B(4,4,8)$ ， P 為一動點。若 $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$ ，求 \overline{OP} 的最大值。
4. 雙曲線與直線 $x+y=8$ 相切，且二焦點為 $(10,0)$ 與 $(0,4)$ ，求雙曲線的正焦弦長。
5. 若 $f(x)=2x-3$ ， $g(x)=\frac{1}{2}x^2-x$ ， $h(x)=x^2+2$ ，求 $\frac{d}{dx}f(g(h(x)))$ 。
6. $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC}=a$ ， $\overline{CA}=b$ ， $\overline{AB}=c$ ，若 $9a^2+9b^2-17c^2=0$ ，求 $\frac{\cot A + \cot B}{\cot C}$ 之值。
7. 數列 $\langle a_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ 滿足關係 $a_1=2008$ 與 $\sum_{k=1}^n a_k = n^2 a_n, n \geq 1$ ，求 a_{2008} 。
8. $f(x)$ 為四次多項式，且 $f(1996)=0, f(1998)=1, f(2000)=4, f(2002)=27, f(2004)=256$ ，求 $f(2008)$ 之值。

第二部分(每題六分)

9. 解方程式 $\sqrt[4]{16-x} + \sqrt[4]{1+x} = 3$ 之實數解。
 10. $\triangle ABC$ 中，已知 $(\overline{AC} + \overline{AB}) \cdot (\overline{AC} - \overline{AB}) = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$ 且 $\angle BAC = 75^\circ$ ，求 $\angle ABC$ 。
 11. 如圖，若 \overline{AB} 為直徑， C 為圓心， E, F 為圓上兩相異點， D 在 \overline{BC} 上且 $\angle CED = \angle CFD = 10^\circ, \angle ACE = 40^\circ$ ，求 $\angle BCF$ 。(圖形角度僅供參考，未準確)
- 
12. 解 $\begin{cases} (3a^2+b^2)(a^2+3b^2) = \frac{1}{a} + \frac{1}{2b} \\ 2(b^4-a^4) = \frac{1}{a} - \frac{1}{2b} \end{cases}$ 之實數解。
 13. 以一個正 24 邊形的頂點任取三點所組成的三角形中，三內角均大於 30 度的三角形有幾個。
 14. 袋中有 2008 顆球，分別編號為 $1,2,3,\dots,2008$ ，設每球被取中的機率相同，今從袋中隨機取出三顆球，設三顆球之中編號最大者為 T ，求 T 的期望值。
 15. 設 $X = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 滿足 $X^4 + \frac{8}{3}X^3 + X^2 + \frac{8}{3}X + I = 0$ ，令 $Y = X + X^{-1}$ ，且 Y 滿足 $Y^2 + pY + qI = 0$ ，求 $p, q, \cos \theta$ 之值
 16. 求組合數 C_{1234}^{2008} 除以 7 的餘數。
 17. 如右圖，有一個 12 格的長方形，現將 1~12 的正整數不重複全部填入 12 格之中，且滿足以下二個條件：(1) 左右相鄰兩格的數字，右方大於左方。(2) 上下相鄰兩格的數字，上方大於下方。試問符合題意的填入法有幾種。
- 
18. 指數函數 $y=f(x)=a^x$ 與對數函數 $y=g(x)=\log_a x$ ，若已知 $f(x)$ 與 $g(x)$ 相交三點，求實數 a 的範圍。