

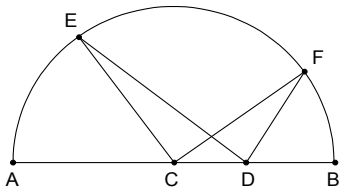
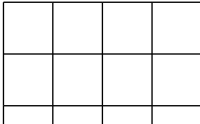
# 國立臺中第一高級中學 97 學年度第一次教師甄選數學科試題

所有題目皆為計算題，請作答於答案卷上，並寫出計算過程，無過程則該題不計分。答錯不倒扣。

## 第一部分(每題五分)

1. 求  $\sin \frac{3\pi}{7} \sin \frac{6\pi}{7} \sin \frac{9\pi}{7}$  之值。
2. 從  $\{1,2,4,5,6,7,8,9,0\}$  選出四個數字(可重複)所排列成的四位正整數之中，有幾個為 15 的倍數。
3. 空間中  $O(0,0,0)$ ， $A(0,2,4)$ ， $B(4,4,8)$ ， $P$  為一動點。若  $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$ ，求  $\overline{OP}$  的最大值。
4. 雙曲線與直線  $x+y=8$  相切，且二焦點為  $(10,0)$  與  $(0,4)$ ，求雙曲線的正焦距長。
5. 若  $f(x)=2x-3$ ， $g(x)=\frac{1}{2}x^2-x$ ， $h(x)=x^2+2$ ，求  $\frac{d}{dx}f(g(h(x)))$ 。
6.  $\triangle ABC$  中， $\overline{BC}=a$ ， $\overline{CA}=b$ ， $\overline{AB}=c$ ，若  $9a^2+9b^2-17c^2=0$ ，求  $\frac{\cot A + \cot B}{\cot C}$  之值。
7. 數列  $\langle a_n \rangle_{n=1}^{\infty}$  滿足關係  $a_1=2008$  與  $\sum_{k=1}^n a_k = n^2 a_n, n \geq 1$ ，求  $a_{2008}$ 。
8.  $f(x)$  為四次多項式，且  $f(1996)=0, f(1998)=1, f(2000)=4, f(2002)=27, f(2004)=256$ ，求  $f(2008)$  之值。

## 第二部分(每題六分)

9. 解方程式  $\sqrt[4]{16-x} + \sqrt[4]{1+x} = 3$  之實數解。
  10.  $\triangle ABC$  中，已知  $(\overline{AC} + \overline{AB}) \cdot (\overline{AC} - \overline{AB}) = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$  且  $\angle BAC = 75^\circ$ ，求  $\angle ABC$ 。
  11. 如圖，若  $\overline{AB}$  為直徑， $C$  為圓心， $E, F$  為圓上兩相異點， $D$  在  $\overline{BC}$  上且  $\angle CED = \angle CFD = 10^\circ, \angle ACE = 40^\circ$ ，求  $\angle BCF$ 。(圖形角度僅供參考，未準確)
- 
12. 解 
$$\begin{cases} (3a^2+b^2)(a^2+3b^2) = \frac{1}{a} + \frac{1}{2b} \\ 2(b^4-a^4) = \frac{1}{a} - \frac{1}{2b} \end{cases}$$
 之實數解。
  13. 以一個正 24 邊形的頂點任取三點所組成的三角形中，三內角均大於 30 度的三角形有幾個。
  14. 袋中有 2008 顆球，分別編號為  $1,2,3,\dots,2008$ ，設每球被取中的機率相同，今從袋中隨機取出三顆球，設三顆球之中編號最大者為  $T$ ，求  $T$  的期望值。
  15. 設  $X = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  滿足  $X^4 + \frac{8}{3}X^3 + X^2 + \frac{8}{3}X + I = 0$ ，令  $Y = X + X^{-1}$ ，且  $Y$  滿足  $Y^2 + pY + qI = 0$ ，求  $p, q, \cos \theta$  之值。
  16. 求組合數  $C_{1234}^{2008}$  除以 7 的餘數。
  17. 如右圖，有一個 12 格的長方形，現將 1~12 的正整數不重複全部填入 12 格之中，且滿足以下二個條件：(1) 左右相鄰兩格的數字，右方大於左方。(2) 上下相鄰兩格的數字，上方大於下方。試問符合題意的填入法有幾種。
- 
18. 指數函數  $y=f(x)=a^x$  與對數函數  $y=g(x)=\log_a x$ ，若已知  $f(x)$  與  $g(x)$  相交三點，求實數  $a$  的範圍。