國立台中一中 96 學年度第一次教師甄選
數學科初選試題

第一部分：

1　一袋中放有 2007 個相同之圍棋子，甲、乙兩人輪流(甲先取)自袋中一次可取 2、3、4、5 或 6 個棋子，取後不放回，拿到最後一個者為輸方。假設經過數個輪迴，乙取到第 330 顆後輪回甲，問甲應取__(1)__顆方保證獲勝。

2　設 x為實數，試求 $f(x)=x^4+2x^2+\dfrac{4}{x^2}$ 之值域為何=____(2)____?

3　袋中有相同大小之紅、黃、白、黑四色球，依序各有 3,4,5,6 顆；每次自袋中取出一球，取出後不放回，假設每球被取出之機會均等，問白球最先被取完之機率為____(3)___。

4　平面上有 11 個相異點，共可形成 48 條直線，則可形成________個三角形？

5

6　設二實係數多項函數 $f(x)=x^3-6x^2+px-3$ 及 $g(x)=x^3-5x^2+qx-2$ 的圖形有相異二交點，且交點均在x軸上，求數對(p，q)=_____(6)____

7　ΔABC 中，a,b,c分別為 $\angle A,\angle B,\angle C$ 之對邊長，若a,b,c成等差, $\angle B=30^\circ$, ΔABC 之面積為 $\dfrac{3}{2}$,求b=_______(7)_______。

第二部分

1 已知正立方體的八個頂點坐標如下：(1,1,1)，(－1,1,1)，(－1,－1,1)，(1,－1,1)，(1, 1, －1)，(－1,1,－1)，(－1,－1,－1)，(1,－1,－1)；今有一平面x+2y+3z=4 與此正立方體相截，則其相截的截面積為______(1)______。

2　試求 $C_1^{20}+2^2C_2^{20}+3^2C_3^{20}+\cdots+20^2C_{20}^{20}=$_____(2)_____(不必化開)。

3　$a,b\in R$，若 $a^3-3ab^2=10$，$b^3-3a^2b=11$，試求 $a^2+b^2=$ ___(3)___

4 設 $a_1=1, a_2=3^{a_1}, a_3=3^{a_2},\cdots,a_n=3^{a_{n-1}}$, 試求所有 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{2007}$ 每一數之個位數數字總和為______(4)______。

5 一實數數列{ a_n }滿足 $a_{n+1}a_n-5a_{n+2}a_n+6a_{n+2}a_{n+1}=0$，$a_1=1$，$a_2=\dfrac{1}{4}$，求一般項 a_n=____(5)___

6 給定一個三次曲線 $y=x^3+ax^2+x+1$, 若由原點向曲線可做三條切線，試求此條件下a之範圍_____(6)_____？

7 平面上一變換矩陣A=$\begin{bmatrix}7&4\\3&6\end{bmatrix}$, 若 $A^{50}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，求a+b+c+d=_____(7)_____?(不必化開)

第三部分　計算證明題:(請依序作答並詳列過程)

1　H 為 ΔABC 之垂心，O 為任意點，設 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$、$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$。

求證：$\overrightarrow{OH}=\dfrac{(\tan A)\vec{a}+(\tan B)\vec{b}+(\tan C)\vec{c}}{\tan A+\tan B+\tan C}$

2　設 $x,y\in R$, 給定方程式 $5x^2-6xy+5y^2-4x-4y-4=0$，試求下列各問題：

(1) 圖形之對稱中心　(2)若 A 為短軸上之頂點，F、G 為圖形之兩焦點，則兩向量 $\overrightarrow{AF}$ ‧ $\overrightarrow{AG}$ 之內積值?
(3)求 x+y 之最大值？

3　試求 $\left[\dfrac{10^{2001}}{10^{667}+2002}\right]$ 的末四位數，其中 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數。