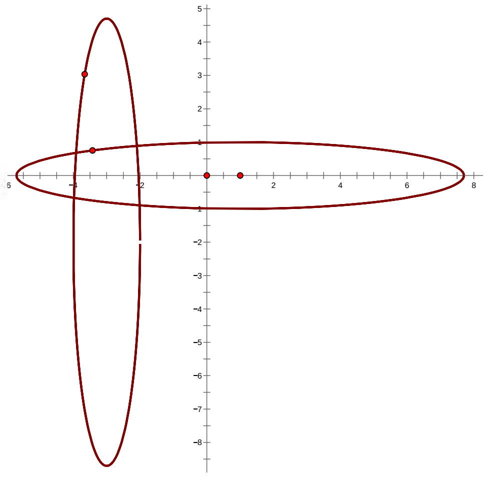
解題 by 一心

1. 設兩圖形$\Gamma:\dfrac{(x-1)^2}{n^2}+y^2\le 1$，$\Gamma':(x+3)^2+\dfrac{(y+2)^2}{n^2}\le 1$（其中 $n\ge 10$），其相交部份的面積為 a_n，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$__________。



當 n 越大，交會區域趨近一 2 乘 2 的正方形

故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=4$

2. 設 a 為實數，且 $x^2+ax+(8-a)=0$ 的兩根都大於 3，則 a 的範圍為__________

$\alpha>3,\beta>3\Rightarrow(\alpha-3)(\beta-3)>0\Rightarrow\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9>0$

$8-a-3(-a)+9>0\Rightarrow 17+2a>0\Rightarrow a>-\dfrac{17}{2}$ (1)

$D\ge 0\Rightarrow a^2-4(8-a)=a^2+4a-32\ge 0\Rightarrow a\ge 4, a\le -8$ (2)

$\alpha\beta>9, 8-a>9\Rightarrow -1>a$ (3)

由(1)(2)(3)得 $-\dfrac{17}{2}<a\le -8$

3. 考慮滿足 $a^2+b^2=49$，$c^2+d^2-16c-12d=-96$ 的所有實數 a，b，c，d，求 $\sqrt[3]{16c+12d-2ac-2bd-47}$ 的最小值為__________。

$\sqrt[3]{16c+12d-2ac-2bd-47}=\sqrt[3]{c^2+d^2+96-2ac-2bd-47}=\sqrt[3]{(c-a)^2+(d-b)^2-(a^2+b^2)+49}$

$=\sqrt[3]{(c-a)^2+(d-b)^2}$

$O_1:a^2+b^2=49, O_2:(c-8)^2+(d-6)^2=4$

$(c-a)^2+(d-b)^2=(10-2-7)^2=1$

故 $\sqrt[3]{(c-a)^2+(d-b)^2}=1$

4. 設 n 為一個 101 位數的正整數，且能被 9 整除。令 n 的所有位數之和為 a，a 的所有位數之和為 b，則 b 的所有可能值之和為__________。

$9\mid n\Rightarrow 9\mid a\Rightarrow 9\mid b$

$\max\{n\}=999999\ldots9999$ 共101位

$a=9\times 101=909$

909以下的數，位數之和最大值為$8+9+9=26$

故b的可能值為9,18

所求$=9+18=27$

5. 試求 $\int_1^2 (x^3-5x^2+x-6)(x-1)^3dx$ 的值。

$$=\int_1^2\left((x-1)^3-2(x-1)^2-6(x-1)-9\right)(x-1)^3dx$$

$$=\int_0^1\left(u^3-2u^2-6u-9\right)u^3du$$

$$=\frac{1}{7}u^7-\frac{2}{6}u^6-\frac{6}{5}u^5-\frac{9}{4}u^4\Big|_0^1$$

$$=-\frac{1529}{420}$$

6. 一個實係數三次多項式函數通過（101，2012）、（99，2008）、（102，2005）、（103，2016）四點，求此函數的切線中，斜率最小的切線所在的直線方程式為__________。

令$g(x)=f(x+99)-2008$(等價於將$f(x)$往左移99，往下移2008)

$g(0)=0, g(2)=4, g(3)=-3, g(4)=8$

令$g(x)=Ax(x-2)(x-3)+Bx(x-2)+Cx+D$

$$\begin{cases} g(0)=D=0 \\ g(2)=2C+D=4 \\ g(3)=3B+3C+D=-3 \\ g(4)=8A+8B+4C+D=8 \end{cases}\text{，解得}D=0, C=2, B=-3, A=3$$

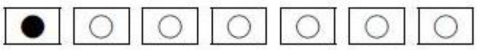
$g(x)=3x(x-2)(x-3)-3x(x-2)+2x=3x^3-18x^2+26x$

$g'(x)=9x^2-36x+26=9(x-2)^2-10$

斜率最小為-10，當$x=2$

還原為$f(x)$，此直線為$y=-10(x-101)+2012=-10x+3022$

7. 將一列 n 個（$n\geq 2$）的小方格中最左邊的黑棋向右移動，每次移動 1 或 2 格，直至最右邊的小方格為止。假設由最左移至最右有 a_n 種移動方法，每種移動方法的機會均等，「移動次數」的期望值為 E_n，求數對(a_7，E_7)為__________。



$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$

$<a_n>=<1,1,2,3,5,8,13,\ldots>, a_7=13$

$2x+y=6,(x,y)$所有解為

$(0,6)\quad \frac{1}{13}\times 6=\frac{6}{13}$

$(1,4)\quad \frac{C_1^5}{13}\times 5=\frac{25}{13}\qquad E_7=\frac{58}{13}$

$(2,2)\quad \frac{C_2^4}{13}\times 4=\frac{24}{13}$

$(3,0)\quad \frac{1}{13}\times 3=\frac{3}{13}$

8. ΔABC中，$A(2,-4)$，若$\angle B$、$\angle C$之角平分線分別為L_1：$x+y-2=0$及L_2：$x-3y-6=0$，則$\overline{BC}$之方程式為________。

A對L_1之對稱點為$(2-2\dfrac{2-4-2}{1+1},-4-2\dfrac{2-4-2}{1+1})=(6,0)$

A對L_2之對稱點為$(2-2\dfrac{2+12-6}{1+9},-4-2\cdot(-3)\dfrac{2+12-6}{1+9})=(\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{5})$

兩點相連之直線即為所求$x+7y-6=0$

9. 有一組正整數a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7使得$\dfrac{4}{7}=\dfrac{a_2}{2!}+\dfrac{a_3}{3!}+\dfrac{a_4}{4!}+\dfrac{a_5}{5!}+\dfrac{a_6}{6!}+\dfrac{a_7}{7!}$，其中$0\le a_i<i$ $(i=2,3,4,5,6,7)$，求數對$(a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ =________。

題目無解送分

10. 設甲、乙兩袋中，甲袋有1白球1黑球，乙袋有1白球，從甲袋隨機取1球放入乙袋後，再從乙袋隨機取1球放回甲袋，完成這樣的動作稱為一局，試求n局後甲袋有1白球1黑球的機率為__________。（答案請以n表示）

轉移矩陣=$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1W1B & 2B \end{array} \\ \begin{array}{c} 1W1B \\ 2B \end{array} & \begin{bmatrix} \dfrac{3}{4} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$，$\begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{n-1} \\ 1-P_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{3}{4}P_{n-1}+\dfrac{1}{2}(1-P_{n-1}) \\ \dots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_n \\ 1-P_n \end{bmatrix}$

得到遞迴關係式$P_n=\dfrac{1}{4}P_{n-1}+\dfrac{1}{2}$，$P_0=1$

$P_n-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{4}(P_{n-1}-\dfrac{2}{3})=(\dfrac{1}{4})^2(P_{n-2}-\dfrac{2}{3})=\dots=(\dfrac{1}{4})^n(P_0-\dfrac{2}{3})=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{4})^n$

故$P_n=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{4})^n$

11. 實數a, b滿足$(a+bi)^{101}=a-bi$ (其中$i=\sqrt{-1}$)，則數對(a, b)有______組解。

$r^{101}(\cos 101\theta+i\sin 101\theta)=r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$

$r^{101}=r, r=1,0$

$if\ \ r=1$

$101\theta=-\theta+2k\pi$

$\theta=\dfrac{2k\pi}{102}, k=0,1,2,\dots,101$

故共有$102+1=103$解

12. y=[x]表高斯函數，求$\sum_{k=1}^{40}[10^{\frac{k}{40}}]$=_________。

$\log 1 < \log[10^{\frac{k}{40}}] < \log 2, 0 \le \frac{k}{40} < 0.3010 \qquad 0 < k < 12.04$

$\log 2 \le \log[10^{\frac{k}{40}}] < \log 3, 0.3010 \le \frac{k}{40} < 0.4771 \qquad 12.04 \le k < 19.08$

$\log 3 \le \log[10^{\frac{k}{40}}] < \log 4, 0.4771 \le \frac{k}{40} < 0.6020 \qquad 19.08 \le k < 24.08$

$\log 4 \le \log[10^{\frac{k}{40}}] < \log 5, 0.6020 \le \frac{k}{40} < 0.6990 \qquad 24.08 \le k < 27.96$

$\log 5 \le \log[10^{\frac{k}{40}}] < \log 6, 0.6990 \le \frac{k}{40} < 0.7781 \qquad 27.96 \le k < 31.12$

$\log 6 \le \log[10^{\frac{k}{40}}] < \log 7, 0.7781 \le \frac{k}{40} < 0.8451 \qquad 31.12 \le k < 33.80$

$\log 7 \le \log[10^{\frac{k}{40}}] < \log 8, 0.8451 \le \frac{k}{40} < 0.9030 \qquad 33.80 \le k < 36.12$

$\log 8 \le \log[10^{\frac{k}{40}}] < \log 9, 0.9030 \le \frac{k}{40} < 0.9542 \qquad 36.12 \le k < 38.16$

$\log 9 \le \log[10^{\frac{k}{40}}] < \log 10, 0.9542 \le \frac{k}{40} < 1 \qquad 38.16 \le k < 40$

原式 $= 12 + 2\cdot 7 + 3\cdot 5 + 4\cdot 3 + 5\cdot 4 + 6\cdot 2 + 7\cdot 3 + 8\cdot 2 + 9\cdot 1 + 10 = 141$

13. 將十次多項式 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)(x+8)(x+9)(x+10)$ 展開後得 $x^{10} + 55x^9 + a_8x^8 + a_7x^7 + \cdots + 10!$，若 $a_8 = 55M$，$a_7 = 55^2N$，其中 M、N 為正整數，求數對(M，N)＝__________。

$2a_8 = \sum_{j=1}^{10}\sum_{i=1}^{10} ij - \sum_{i=1}^{10} i^2 = 55^2 - 55\cdot 7 = 55\cdot 48$，故 $M = 24$

$6a_7 = \sum_{k=1}^{10}\sum_{j=1}^{10}\sum_{i=1}^{10} ijk - 3\sum_{j=1}^{10}\sum_{i=1}^{10} i^2 j + 2\sum_{i=1}^{10} i^3 = 55^3 - 55^2\cdot 21 + 2\cdot 55^2 = 55^2\cdot 36$，故 $N = 6$

14. 空間中，四面體 A-BCD，$\overline{AB} = \overline{CD} = 6$，$\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = 5$，$\overline{BD} = 7$，求四面體 A-BCD 的體積為__________。

15. 四邊形 ABCD，$\overline{AB} = 14$、$\overline{BC} = 9$、$\overline{CD} = 7$、$\overline{DA} = 12$，求四邊形 ABCD 的所有內切圓中，面積最大者為__________。

四邊形$ABCD = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\frac{B+D}{2}}$

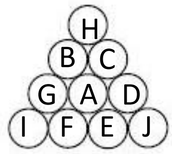
四面形面積最大，則內切圓面積亦最大

故當四邊形面積最大時，$\cos\frac{B+D}{2} = 0$，為圓內接四邊形

面積=$\sqrt{7\cdot 14\cdot 12\cdot 9}=r\cdot s=21r=42\sqrt{6}$

$r=2\sqrt{6}$，內切圓面積=$r^2\pi=24\pi$

16. 用 5 種不同顏色塗右圖的 10 個固定不動的圓形區域，且相鄰區域須塗不同色，則共有__________種塗法。



先塗 A，共 5 種

再塗 B,C,D,E,F,G，即等價於一 n 等分圓塗色問題，方法數為 $(4-1)^6+(-1)^6(4-1)=732$

再塗 H,I,J，有 $3^3=27$

共有 $5\cdot 732\cdot 27=98820$