

國立臺中女子高級中學 101 學年度教師甄選數學科試題

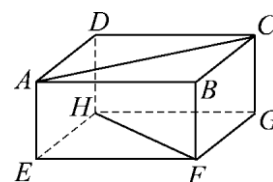
壹、填充題（每題 5 分）

1. 設 $y = 8^n x^2 - 2^n(2^n + 1)x + 1$ ($n \in N$) 之圖形與 x 軸交於 A_n 與 B_n 兩點，若 $\overline{A_n B_n}$ 之長為 ℓ_n ，則 $\sum_{n=1}^{\infty} \ell_n$ 之和為_____。

2. 設 $3^x - \frac{2(a-1)}{3^x} = a - 3$ 有實數解，則實數 a 之範圍為_____。

3. 已知複數 $z = \sqrt{6} + 3i$ ，若 $z_1 = 3z^3$ ， $z_2 = \frac{z^5}{3}$ ，則 $|z_1 + z_2| =$ _____。

4. 如圖，長方體 $ABCD - EFGH$ 中，已知 $\overline{AC} : \frac{x+1}{2} = \frac{-y+3}{2} = \frac{z}{1}$ ， $\overline{HF} : \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{-z+2}{1}$ ，



且 $A(3, -1, 2)$ ，則此長方體的體積為_____。

5. 方程式 $\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0$ 的所有實數解為_____。

6. 設實數 x, y 滿足 $\begin{cases} xy \leq 81 \\ x^3 y \leq 729 \\ x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$ ，若 $3x^2 y$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則 $M + m$ 之值為_____。

7. 設有 40 個隊伍參加羽球友誼賽，為使任三隊中至少有二隊相互交手過，則至少需進行_____場比賽。

8. 在坐標平面上， x 坐標和 y 坐標都是整數的點稱為格子點，對任意正整數 n ，連接原點與點 $P_n(n, n+5)$ ，若此線段上除兩端點外的格子點共有 a_n 個，則 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2012}$ 之值為_____。

9. 定義正整數數列 $\{a_n\}$ 如下：

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ \text{當 } n \geq 2, a_n \text{ 為 } n - a_k^2 \text{ 最小可能的正值，其中 } 1 \leq k < n \end{cases}$$

例如： $a_2 = 2 - 1^2 = 1$ ， $a_3 = 3 - 1^2 = 2$ 。試求 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{101}$ 之值為_____。

10. 若對直線 $y = mx$ 作鏡射的矩陣為 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ，則 m 之值為_____。

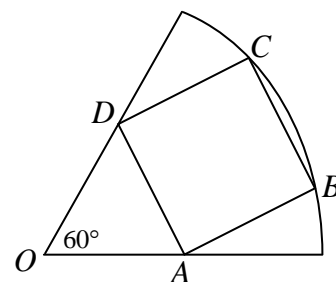
11. 設有 m 個互不相同的正偶數和 n 個互不相同的正奇數之和為 2012，則 $5m + 12n$ 的最大值為_____。

12. 設兩矩陣 P, Q 滿足 $\begin{cases} 3P+4Q=A \\ P+Q=I_2 \end{cases}$ ，其中 $A=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ ， $I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，若 $A^7=aP+bQ$ ，則 $\log_{12} \frac{1}{ab} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. 設 $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{12}$ 為複數 $3-4i$ 的 12 次方根，且它們的主幅角分別為 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{12}$ ，其中

$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_{12} < 2\pi$ ，則 $\tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2 + \tan \alpha_2 \cdot \tan \alpha_3 + \tan \alpha_3 \cdot \tan \alpha_4 + \dots + \tan \alpha_{12} \cdot \tan \alpha_1$ 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 是內接於一扇形的正方形，頂點 A, D 分別在扇形的兩半徑上，頂點 B, C 在扇形的弧上，其中扇形的半徑為 1、圓心角為 60° 。則正方形 $ABCD$ 的面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



15. 有一個電視猜謎遊戲，在 5 道門後有三種不同的獎品，每道門後最多只有一種獎品，參賽者各自站在選定的門前面，等主持人開啟每道門後，參賽者即可獲得門後的獎品(參賽者可獲得相同的獎品)。今有 5 位參賽者參賽，各自獨立的隨機選擇其中一道門，則只有 2 種獎品被選中的機率為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

16. 試求直線 $y=4x$ 在第一象限中，落在曲線 $y=6\pi \sin^2 x$ 下方部分的所有線段長的總和為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

貳、計算與證明題（每題 10 分，請寫出詳細計算過程，否則不予計分）

1. 試證明： $\frac{C_{50}^{100}}{2^{100}} < 0.1$ 。

2. 設曲線 $y=x(x-2)^2$ 與直線 $y=mx$ ， $(m>0)$ 交於相異三點，若二者所圍成的兩區域之面積相等，求 m 之值。