中華民國第四十六屆中小學科學展覽會
作品說明書

高中組　數學科

佳作

040406

三角形到四面體的完全類比

學校名稱： 國立花蓮高級中學

作者：	指導老師：
高二 林志成	羅伸儀
高二 郭文杰	
高二 鍾思齊	
高二 李宗燁	

關 鍵 詞：三角形、類比、四面體

壹、摘要

在平面三角形的性質中，有面積公式：$\frac{底\times高}{2}$、$\frac{ab\sin\theta}{2}$、$\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$；三角形的正弦公式：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$；餘弦公式：$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$；外接圓半徑和內接圓半徑等等。如果把這些性質類比到空間四面體中會是什麼樣的形式呢？以下就是我們的探討過程。

貳、研究動機

我們在二年級上學期時，那時我們對於平面三角形的性質也都學習的差不多了，而學校又正好教到空間向量，討論正四面體的體積和內、外接球半徑的算法，我們發現三角形和四面體都是二維和三維空間中，分別由最少邊、面所組成的圖形，又發現他們的形狀都滿相似的，像是正三角形和正四面體；直角三角形和直角四面體；等腰三角形和等腰四面體等等。感覺彼此似乎有類似的關係，於是我們便開始推想是否有其他三角形的性質可以類比到四面體！

叁、研究目的

以類比方式，藉著三角形在平面上的性質，推導出四面體在空間中之性質。

肆、研究設備及器材

筆、紙、電腦

Microsoft Word, The Geometer’s Sketchpad(GSP)4.0 版, 3D Studio Max

伍、研究過程

一、基礎性質篇：在所有數學著作中最重要的便是基礎，整篇數學的架構都必須在公設、定義下推衍，一如幾何中經典名著幾何原本一樣，我們也期望能以數學嚴謹的精神進行研究，這便是第一篇的中心思想。

（一）方向：將三角形點類比為四面體線，三角形線類比為四面體面，三角形面積類比為四面體體積。

定義 1：四面體四頂點分別為 $P_1P_2P_3P_4$，則由 $\angle P_2P_1P_3, \angle P_2P_1P_4, \angle P_3P_1P_4$ 此三角圍成之角稱之為三面角 $\angle P_1-P_2P_3P_4$。

定義 2：$\angle P_1-P_2P_3P_4=\angle P_2P_1P_3+\angle P_2P_1P_4+\angle P_3P_1P_4$。

（若 $\angle P_1-P_2P_3P_4=\angle P_1^{'}-P_2^{'}P_3^{'}P_4^{'}$，$\angle P_2P_1P_3,\angle P_2P_1P_4,\angle P_3P_1P_4$ 未必對應相等於 $\angle P_2^{'}P_1^{'}P_3^{'},\angle P_2^{'}P_1^{'}P_4^{'},\angle P_3^{'}P_1^{'}P_4^{'}$）

定義 3：$\angle P_1-P_2P_3P_4$ 和 $\angle P_1^{'}-P_2^{'}P_3^{'}P_4^{'}$，若 $\angle P_2P_1P_3,\angle P_2P_1P_4,\angle P_3P_1P_4$ 依序相等於 $\angle P_2^{'}P_1^{'}P_3^{'},\angle P_2^{'}P_1^{'}P_4^{'},\angle P_3^{'}P_1^{'}P_4^{'}$ 則此二角度全等。

定義 4：若兩四面體六稜對應相等，則此二四面體全等。

定義 5：由三組相互垂直之向量張出之四面體爲直角四面體，其中張出之角稱爲直角三面角，直角三面角的對面爲斜面，另外三面皆稱之爲股面。

（二）基礎性質：

類推的第一步我們想從國中剛接觸幾何時的性質開始想，首先想到的就是三角形全等性質。

(1)三角形有 SSS、SAS、RHS、AAS 全等性質。

類推：四面體有 FFF、FAF、RHF、AAAF 全等性質。

FFF－若兩四面體三面對應全等，則兩四面體全等。

Proof：因三面對應全等，故其組成第四面之三稜皆對應相等，故第四面也相等，得其六稜、三面角對應相等，根據定義四得其全等。

FAF－若兩四面體其中兩面對應全等，且此二面共同之三面角至少有一與另一四面體對應相等，則兩四面體全等。

Proof：如圖 1、2，設兩四面體 $\Delta ACD\cong\Delta EGH$，$\Delta ABC\cong\Delta EFG$，三面角 $\angle A-BCD=\angle E-FGH$。則 $\overline{AB}=\overline{EF}$、$\overline{AD}=\overline{EH}$，

$\angle BAD=\angle A-BCD-\angle BAC-\angle CAD$

$=\angle E-FGH-\angle FEG-\angle GEH=\angle FEH$，得 $\Delta ABD\cong\Delta EFH$（SAS），由 FFF 得兩四面體全等。同理，若 $\Delta ACD\cong\Delta EGH$，$\Delta ABC\cong\Delta EFG$，三面角 $\angle$C-ABD＝$\angle G-FEH$，兩四面體也全等。

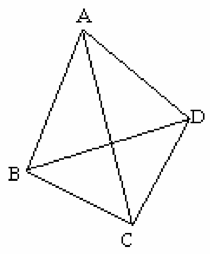


圖 1

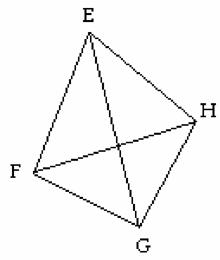


圖 2

RHF－若兩直角四面體一股面及斜面對應相等，則兩四面體全等。

Proof：如圖 3、4，設兩四面體$\Delta ABC=\Delta EFG$，$\Delta ACD=\Delta EGH$，則兩四面體五稜對應相等，又ΔBCD中$\overline{CD}$、$\overline{BC}$皆已固定，由畢氏定理得$\overline{BD}$固定，得ΔBCD也對應相等，由 FFF 得兩四面體全等。

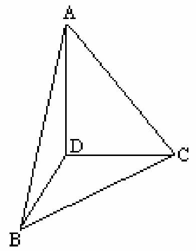


圖 3

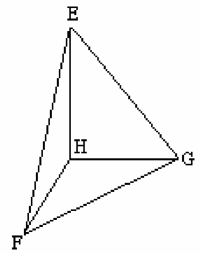


圖 4

AAAF—若兩四面體三個三面角對應相等且一個面對應相等，則兩四面體全等。

Proof：如圖 5，將四面體 ABCE 及四面體 GHIK 展開〈其中 A、F、D 三點重合，G、L、J 三點重合〉，設$\Delta ABC \cong \Delta GHI$且全部三面角對應相等(Θ三個三面角若相等，第四個必相等)。

則$\overline{BC}=\overline{HI}$，$\overline{CD}=\overline{IJ}$，$\angle BCD=\angle HIJ$，由餘弦定理得$\overline{BD}=\overline{HJ}$，同理

$\overline{CF}=\overline{IL} \Rightarrow \Delta BCF \cong \Delta HIL$、$\Delta BCD \cong \Delta HIJ$〈SAS〉

$\angle BCF=\angle HIL$且$\angle DBC=\angle JHI$又$\overline{BC}=\overline{HI}$

$\Rightarrow \Delta BCM \cong \Delta HIN$〈ASA〉

$\angle FBD=\angle FBC-\angle DBC=\angle LHI-\angle JHI=\angle LHJ$且$\overline{BF}=\overline{HL}$又$\overline{BD}=\overline{HJ}$

$\Rightarrow \Delta BFD \cong \Delta HLJ$〈SAS〉$\Rightarrow \overline{FD}=\overline{LJ}$

又Θ $\angle FED=360^{\circ}-\angle E-ABC=360^{\circ}-\angle E-ABC=\angle LKJ$，且$\Delta FED$、

ΔLKJ為等腰三角形$\Rightarrow \angle EFD=\angle EDF=\angle KLJ=\angle KJL$

$\Rightarrow \Delta EFD \cong \Delta KLJ$〈AAS〉

四邊形 BCDF= $\Delta BCD + \Delta BFD = \Delta HIJ + \Delta HLJ$ =四邊形 HIJL

$\Rightarrow$ 五邊形$BFEDC$ =四邊形 BCDF- ΔEFD =四邊形 HIJL- ΔKLJ =五邊形 HLKJI

$\Rightarrow$得兩四面體全等。

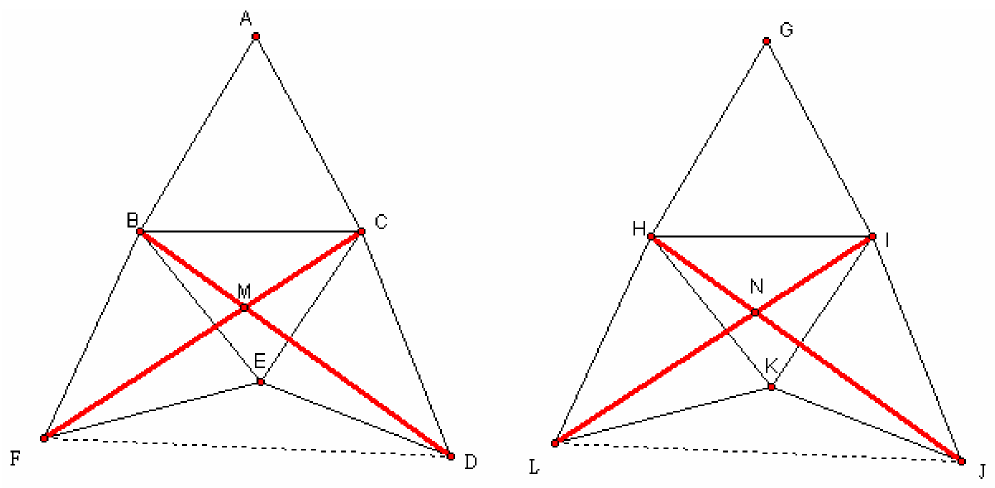


圖 5

三角形中三心的性質一直是國、高中生最重視的項目之一，三心的找法是國中幾何中重要的方法，空間中四面體外心、重心也和三角形外心、重心有所關聯，接下來我們會討論其找法，至於內心牽扯到角度，目前尚未成功探討。

定義 6：四面體中外接圓圓心稱爲此四面體的外心，此點到四頂點等距。

〈2〉三角形外心找法－取三角形三邊中點，分別以三邊中點爲垂足作三邊之垂線，則此三條垂線交於外心。
類比：四面體外心找法－取四面體四個面外心，分別以四面外心爲垂足作四條垂直四面之線，則此四條垂線交於外心。

Proof：如圖四面體 ABCD 中，四面外心分別爲O_1、O_2、O_3、O_4，M 爲$\overline{CD}$中點，$\overline{E_1O_1}$、$\overline{E_2O_2}$、$\overline{E_3O_3}$、$\overline{E_4O_4}$分別爲四面垂線

〈I〉連$\overline{O_1M}$、$\overline{O_2M}$，$\because O_1$、O_2爲外心$\Rightarrow \overline{O_1M} \perp \overline{CD}$、$\overline{O_2M} \perp \overline{CD}$

$\Rightarrow$平面O_1MO_2是$\overline{CD}$的垂直平分面

$\because \overline{E_1O_1} \perp$ 平面 BCD $\Rightarrow \overline{E_1O_1} \perp \overline{CD} \Rightarrow \overline{E_1O_1}$ 在 $\overline{CD}$ 的垂直平分面上，同理，$\overline{E_2O_2}$ 也在 $\overline{CD}$ 的垂直平分面上，又 $\overline{E_1O_1}$ 、$\overline{E_2O_2}$ 不平行 $\Rightarrow \overline{E_1O_1}$ 、$\overline{E_2O_2}$ 相交。

（II）設此交點爲 O，過 O 對△ABD 做垂線交其於 $O_3^{'}$。

$\because \overline{O_1C} = \overline{O_1B} = \overline{O_1D} \Rightarrow \overline{OC} = \overline{OB} = \overline{OD}$，又 $\because \overline{O_2A} = \overline{O_2C} = \overline{O_2D} \Rightarrow \overline{OC} = \overline{OA} = \overline{OD}$

$\Rightarrow \overline{OC} = \overline{OB} = \overline{OD} = \overline{OA} \Rightarrow \overline{O_3'A} = \overline{O_3'B} = \overline{O_3'D} \Rightarrow O_3^{'}$ 爲△ABD 之外心，$\Rightarrow O_3^{'}$ 、O_3 重合，即 $\overline{E_3O_3}$ 過 O，同理可推得四線共點。

（III）由（II）知 $\overline{OC} = \overline{OB} = \overline{OD} = \overline{OA}$，故 O 爲四面體之外心。

若以物理的方法來想四面體的重心，如圖，將四面體想成由無限多個平行於底面的橫切面所構成；而每一橫切面都是相似三角形，它們的重心應排列在一直線上，即頂點到底面的重心連線。這告訴我們：一四面體的重心應在每一頂點到其對應的底面的重心連線的交點上！故一四面體的四個頂點到其對應的底面的重心連線必共點，而此交點即爲此四面體的重心，下面我們將以數學觀點證明此事。

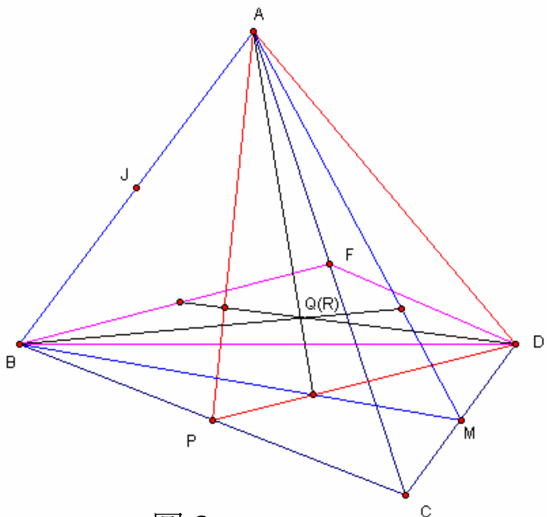


圖 6

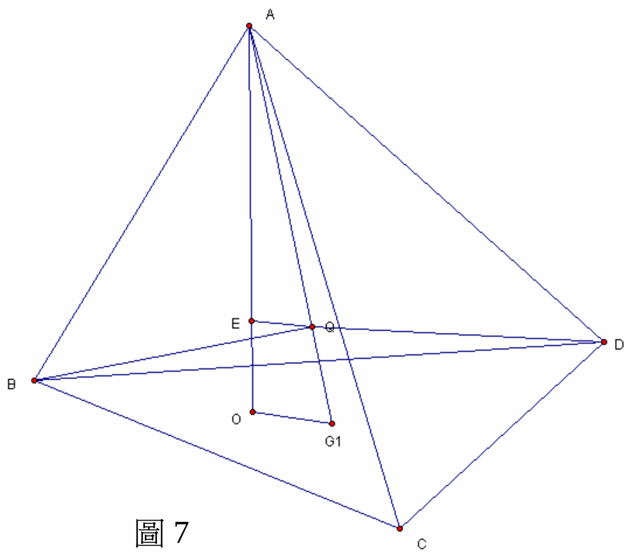


圖 7

定義 7：四面體中若一點和任三頂點所組成的四面體體積皆相等，則此點爲其重心。

（3）三角形重心找法：分別取三角形三個邊的中點，在分別將其對頂點與中點相連，則此三條線交於一點重心。

類比：四面體重心找法：分別取四面體四個面的重心，再分別將其對頂點與重心相連，則此四條線必交於一點重心。

Proof：先證四線共點

（I）如圖 6，四面體 ABCD 中，△BCD、△ACD、△ABD、△ABC 重心分別爲 G_1、G_2、G_3、G_4，M 爲 $\overline{CD}$ 中點，P 爲 $\overline{BC}$ 中點，F 爲 $\overline{AC}$ 中點，J 爲 $\overline{AB}$ 中點。

（II）∵平面 ABM 和平面 APD 會交於一條線 $\overline{AG_1}$，又平面 ABM 和平面 APD 只會和平面 BDF 交於一點 Q，且 Q 在 $\overline{AG_1}$ 上，已知 $\overline{BG_2}$ 在平面 ABM、BDF 上、$\overline{DG_4}$ 在 APD、BDF 上 $\Rightarrow$ $\overline{BG_2}$ 、$\overline{DG_4}$ 必過 Q，$\Rightarrow$ $\overline{BG_2}$ 、$\overline{DG_4}$ 、$\overline{AG_1}$ 共點，同理作平面 JCD $\Rightarrow$ $\overline{CG_3}$ 也過 Q $\Rightarrow$ 四線會共點於 Q。

（III）Q有一性質，對圖6中G所在的一截面APD進行探索，其中P爲 $\overline{BC}$ 稜線的中點；則 $\overline{AG_4}$ ：$\overline{G_4P}$ ＝2：1＝ $\overline{DG_1}$ ：$\overline{G_1P}$ ，設 $\overline{AQ}$ ＝k $\overline{QG_1}$ ，則

$\overrightarrow{PQ}=\frac{k}{k+1}\overrightarrow{PG_1}+\frac{1}{k+1}\overrightarrow{PA}=\frac{k}{3(k+1)}\overrightarrow{PD}+\frac{3}{k+1}\overrightarrow{PG_4}$ ，∵ G_4-Q-D 三點共線，可得

$$\frac{k}{3(k+1)}+\frac{3}{k+1}=1\Rightarrow k=3$$

（IV）如圖 7（圖 6 之四面體和圖 7 相等），四面體中 G_1 爲底面三角形重心，連 $\overline{AG_1}$ 作 $\overline{AO}\perp$ 底面 BCD，作 $\overline{QE}$ 平行於 $\overline{G_1D}$ ，則 $\overline{ED}$ 爲四面體 QBCD 之高，令其爲 h_1，由（3）可知∵ $\overline{AQ}:\overline{QG_1}$ =3：1 $\Rightarrow \overline{AE}:\overline{EO}=3:1\Rightarrow \overline{EO}=\frac{1}{4}\overline{AO}$ ，若四面面積分別爲△BCD、△ABC、△ABD、△ACD 且對應之高爲 H_1、H_2、H_3、H_4，則有方程式 $\Delta BCD\times H_1=\Delta ABC\times H_2=\Delta ABD\times H_3=\Delta ACD\times H_4$ ，這裡 $H_1=\overline{AO}\Rightarrow\ H_1=4h_1$，同理令四面體 QABC、QABD、QACD 之高分別爲 h_1、h_2、h_3 ，得 $\Delta BCD\times 4h_1=\Delta ABC\times 4h_2=\Delta ABD\times 4h_3=\Delta ACD\times 4h_4$ ，故任三點至 Q

所成的四個四面體相等，得 Q 為重心。
另外由III我們可得由四面體任一頂點到其對應的底面的重心連線段上取3：1的內分點位置就是G點所在。

在國中時老師曾提過下面的基礎性質，於是將之作了類比。

定義 8：若一四面體之六稜等長稱為正四面體。

（4）如圖 8，正三角形 ABC 中任取一點 P 到三邊作垂直線交三邊於 D、E、F，又 h 為 ΔABC 之高，則 $\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF}=h$（維維安尼定理）—(1)

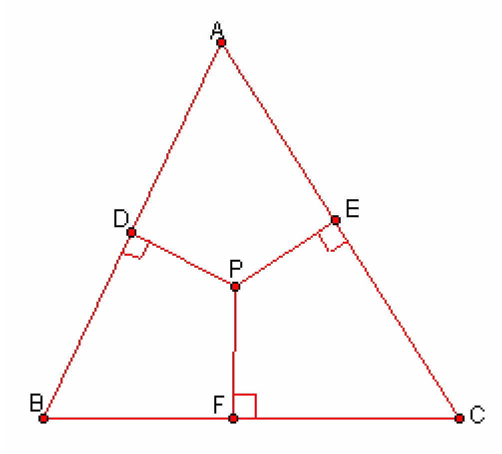


圖 8

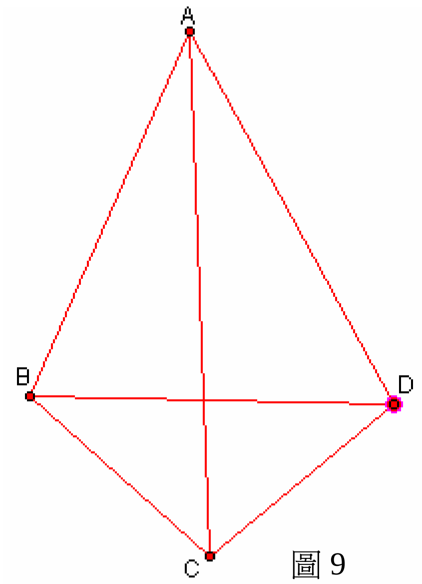


圖 9

類推：如圖 9，正四面體內任取一點 P 到四面作垂直線分別交四面於 E、F、G、H，又 h 為四面體 ABCD 之高，則 $\overline{PE}+\overline{PF}+\overline{PG}+\overline{PH}=h$

Proof：

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot\overline{PE}\cdot S_{ABC}+\frac{1}{6}\cdot\overline{PF}\cdot S_{ABD}+\frac{1}{6}\cdot\overline{PG}\cdot S_{ACD}+\frac{1}{6}\cdot\overline{PH}\cdot S_{BCD}=\frac{1}{6}\cdot S_{BCD}\cdot h$$

(其中S表圖形之面積)

又$S_{ACD}=S_{ABC}=S_{ABD}=S_{BCD}$

$\Rightarrow \overline{PE}+\overline{PF}+\overline{PG}+\overline{PH}=h$—(2)

二、進階性質篇：在此篇中我們將把一些廣為人知的三角形性質推廣到四面體上，其中一些得到了驚人的相似性，我們定義一些新的符號，原則上盡量

符合類比的形式！

定義 9：若兩平面不平行，則由兩平面交線上任一點分別在兩平面上做垂直於交線的兩條射線，此兩條射線之夾角稱爲兩面角。又面 i 與面 j 所夾的內二面角以<i,j>表示。

（1）三角形的投影定理：a=bcosC+ccosB，b=acosC+ccosA，c=acosB+bcosA —(3)

猜想：我們假設四面體底面會由三側面各乘以其與底面所夾的二面角，經以下推導證明想法無誤。

類推：設四面體 $P_0P_1P_2P_3$ 的頂點 P_i 所對的面的面積爲 S_i ，則可得

$$\left.\begin{array}{l} S_0 = S_1\cos<0,1>+S_2\cos<0,2>+S_3\cos<0,3>, \\ S_1 = S_0\cos<0,1>+S_2\cos<1,2>+S_3\cos<1,3>, \\ S_2 = S_0\cos<0,2>+S_1\cos<1,2>+S_3\cos<2,3>, \\ S_3 = S_0\cos<0,3>+S_1\cos<1,3>+S_2\cos<2,3>. \end{array}\right. \text{—(4)}$$

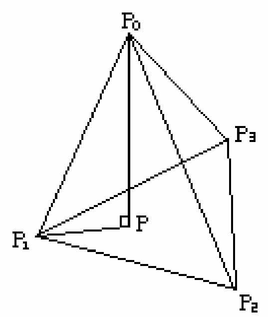


圖 10

Proof：如圖 10，設此四面體高爲 $\overline{P_0P}$ 其中 P 在 $\Delta P_1P_2P_3$ 上。

又 $S_1\cos<0,1> = \Delta PP_2P_3$，$S_2\cos<0,2> = \Delta PP_1P_3$，$S_3\cos<0,3> = \Delta PP_2P_1$，且 $\Delta PP_2P_1+\Delta PP_2P_3+\Delta PP_1P_3 = S_0$ 。

得 $S_0 = S_1\cos<0,1>+S_2\cos<0,2>+S_3\cos<0,3>$，同理可得證其他式。

剛開始推導餘弦定理時也想用高中的座標化方法去導，不過後來發現好像可以利用投影定理來導出餘弦定理的形式，於是開始推導式子。

（2）三角形的餘弦定理：$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

猜想：我們假設四面體餘弦定理爲任一面面積可以寫成其他三面面積和其兩面角的關係，於是我們就提出很多猜想的式子，經由檢驗後發現其中一式似乎成立，於是便進行證明。

類推：四面體也存在餘弦定理：

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1S_2\cos<1,2> - 2S_2S_3\cos<2,3> - 2S_3S_1\cos<1,3> \text{—(5)}$$

其中四面體 $P_0P_1P_2P_3$ 的頂點 P_i 所對的面面積爲 S_i

Proof：根據投影定理可得：

$$S_0^2 = S_0\left[S_1\cos<0,1> + S_2\cos<0,2> + S_3\cos<0,3>\right]$$

$$\begin{aligned} &= S_1(S_1 - S_2\cos<1,2> - S_3\cos<1,3>) \\ &\quad + S_2(S_2 - S_1\cos<1,2> - S_3\cos<2,3>) \\ &\quad + S_3(S_3 - S_1\cos<1,3> - S_2\cos<2,3>) \end{aligned}$$

$$= S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1S_2\cos<1,2> - 2S_2S_3\cos<2,3> - 2S_3S_1\cos<1,3>$$

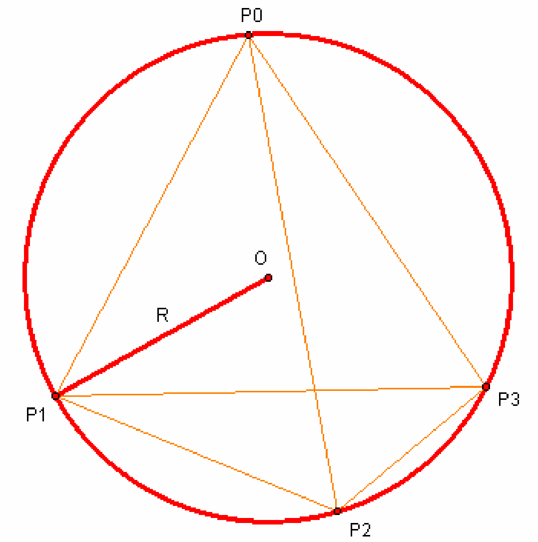


圖 11

（3）三角形的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ —(6)

猜想：正弦定理牽涉到外接球半徑，一開始我們對外接球半徑幾乎是束手無策，加上不論是使用兩面角或是三面角的定義都無法表示出類似三角形的形式，最後只好捨棄角度，用其他東西表示。

類推：四面體的正弦定理：$\dfrac{S_0}{\sin P_0} = \dfrac{S_1}{\sin P_1} = \dfrac{S_2}{\sin P_2} = \dfrac{S_3}{\sin P_3} = 2R^2$ —(7)

其中 R 是四面體 $P_0P_1P_2P_3$ 的外接球 O 的半徑，

$$\sin P_k = \left(- \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & & \\ 1 & & \boxed{-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\angle P_i O P_j}{2}} & \\ 1 & & & \end{vmatrix} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(i、j、k=0、1、2、3，i、j≠k)

Proof：如圖 11，令 $\overrightarrow{P_1P_2}$ =（ x_1 ， x_2 ）、 $\overrightarrow{P_1P_3}$ =（ y_1 ， y_2 ）

$$\Delta P_1P_2P_3{}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{Vmatrix} = S_0{}^2$$

$$(2S_0)^2 = \begin{vmatrix} \overrightarrow{P_1P_2}^2 & \overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_3} \\ \overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_3} & \overrightarrow{P_1P_3}^2 \end{vmatrix}$$（記 $d_{ij} = \left|P_iP_j\right|$ ）（矩陣乘法）

以 $\overrightarrow{P_1P_2}$ ‧ $\overrightarrow{P_1P_3} = \left|\overline{p_1p_2}\right|\left|\overline{p_1p_3}\right|\cos\angle p_2p_1p_3 = \frac{1}{2}(d_{12}^2 + d_{13}^2 - d_{23}^2)$ 代入得

$$(2S_0)^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & d_{12}^2 & \frac{1}{2}(d_{12}^2 + d_{13}^2 - d_{23}^2) \\ 0 & \frac{1}{2}(d_{12}^2 + d_{13}^2 - d_{23}^2) & d_{13}^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2}d_{12}^2 & \frac{1}{2}d_{12}^2 & \frac{1}{2}(d_{13}^2 - d_{23}^2) \\ -\frac{1}{2}d_{13}^2 & \frac{1}{2}(d_{12}^2 - d_{23}^2) & \frac{1}{2}d_{13}^2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}d_{12}^2 & \frac{1}{2}d_{12}^2 & \frac{1}{2}\left(d_{13}^2 - d_{23}^2\right) \\ 1 & -\frac{1}{2}d_{13}^2 & \frac{1}{2}\left(d_{12}^2 - d_{23}^2\right) & \frac{1}{2}d_{13}^2 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2}d_{12}^2 & -\frac{1}{2}d_{13}^2 \\ 1 & -\frac{1}{2}d_{12}^2 & 0 & -\frac{1}{2}d_{23}^2 \\ 1 & -\frac{1}{2}d_{13}^2 & -\frac{1}{2}d_{23}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

將 $d_{ij}=2R\sin\frac{\angle P_iOP_j}{2}$ 代入即得

$$(2S_0)^2=-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2R^2\sin^2\frac{\angle P_1OP_2}{2} & -2R^2\sin^2\frac{\angle P_1OP_3}{2} \\ 1 & -2R^2\sin^2\frac{\angle P_1OP_2}{2} & 0 & -2R^2\sin^2\frac{\angle P_2OP_3}{2} \\ 1 & -2R^2\sin^2\frac{\angle P_1OP_3}{2} & -2R^2\sin^2\frac{\angle P_2OP_3}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

得 $2S_0=4R^2\sin P_0$ ，其餘類推。

在高二上的課程中老師在向量單元中補充了幾何學中的兩個定理，我們覺得應可推到空間中，於是便開始研究。

（4）西瓦定理：

ΔABC 三邊之內分點為 D、E、F，且 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 三線段共點於 P，則

$\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}\cdot\frac{\overline{BF}}{\overline{FA}}=1$—(8)

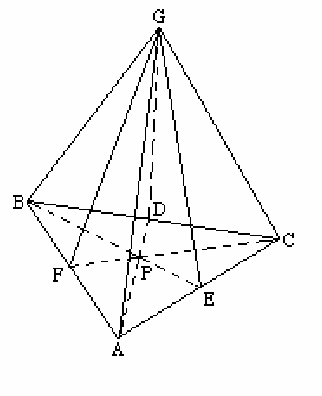


圖 12

猜想：依照三角形西瓦定理的型式，我們認為應會出現四面體面積的比例關係。但經由推導後發現不只有面積間的比例關係，更有體積間的比例關係。

類推：在ΔABC的空間中擺進一點 G，如圖 12

$\because \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\dfrac{a\Delta GAE}{a\Delta GCE}$ 其他同理

$\therefore \dfrac{a\Delta GAE\cdot a\Delta GCD\cdot a\Delta GBF}{a\Delta GEC\cdot a\Delta GDB\cdot a\Delta GFA}=1$—(9)

我們稱之爲「面積西瓦定理」。

$\because \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\dfrac{a\Delta AEB}{a\Delta ECB}=\dfrac{V(GAEB)}{V(GECB)}$

$\therefore \dfrac{V(GAEB)\cdot V(GCDA)\cdot V(GBFC)}{V(GECB)\cdot V(GBBA)\cdot V(GFAC)}=1$—(10)

我們稱之爲「體積西瓦定理」。

（5）孟氏定理：ΔABC的$\overline{AB}$邊中的 H 點作延長線與$\overline{BC}$的延長線交於 D 點，與$\overline{AC}$交於 E 點則$\dfrac{\overline{AH}}{\overline{HB}}\cdot\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}\cdot\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1$—(11)

猜想：導出面積西瓦定理後，依照類推西瓦定理的經驗，我們亦認爲除了四面體孟氏定理的面積比例關係應還會有體積比例關係。

類推：在ΔABC的空間中擺進一點 P，如圖 13

$\because \dfrac{\overline{AH}}{\overline{HB}}=\dfrac{a\Delta PAH}{a\Delta PBH}$，$\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\dfrac{a\Delta PBD}{a\Delta PCD}$，$\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=\dfrac{a\Delta PCE}{a\Delta PEA}$

$\therefore \dfrac{a\Delta PAH\cdot a\Delta PBD\cdot a\Delta PCE}{a\Delta PBH\cdot a\Delta PCD\cdot a\Delta PEA}=1$—(12)

我們稱之爲「面積孟氏定理」!

體積的情形和西瓦定理有些不同，討論如下：

$\therefore \dfrac{V(PADH)\cdot V(PBDA)\cdot V(PCBE)}{V(PBDH)\cdot V(PCDA)\cdot V(PBEA)}=1$或$\dfrac{V(PADH)\cdot V(PBDA)\cdot V(PCDE)}{V(PBDH)\cdot V(PCDA)\cdot V(PDEA)}=1$

我們稱之爲「體積孟氏定理」。

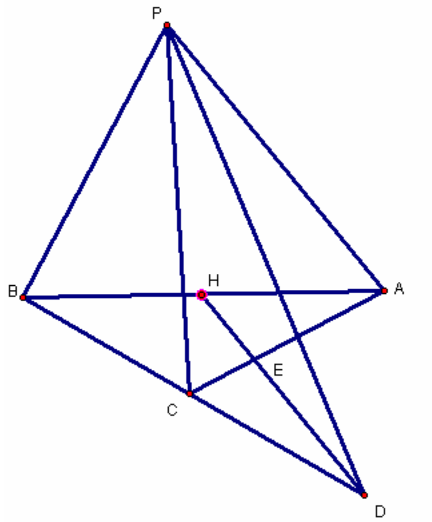


圖 13

（6）三角形的內分比定理：

如圖 14，ΔABC中，$\overline{AD}$爲$\angle A$的分角線，則$\dfrac{a\Delta ABD}{a\Delta ACD}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$—(13)

猜想：應可利用如孟氏、西瓦的線段比等於面積比之方法，類推出內分比定理。

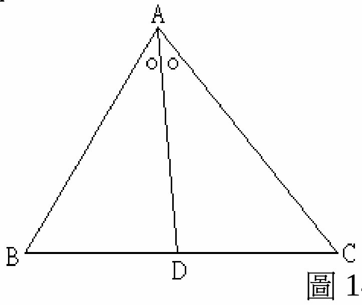


圖 14

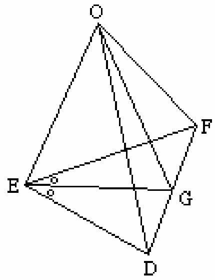


圖 15

類推：如圖 15，四面體 O-DEF 中，$\overline{EG}$ 爲 $\angle DEF$ 的分角線，則

$\dfrac{V(ODGE)}{V(OFGE)}=\dfrac{a\Delta DGE}{a\Delta FGE}=\dfrac{\overline{DG}}{\overline{FG}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{FE}}$稱爲四面體底邊之內分比定理。

（7）直角三角形的畢氏定理：$c^2=a^2+b^2$—(14)

類推：直角四面體的畢氏定理：$(\Delta DAB)^2+(\Delta DBC)^2+(\Delta DAC)^2=(\Delta ABC)^2$—(15)

Proof：設座標 D（0,0,0）A（0,0,a）B（b,0,0）C（0,c,0）如圖 16，

$$\because (\Delta DAB)^2+(\Delta DBC)^2+(\Delta DAC)^2=\frac{1}{4}(b^2c^2+a^2b^2+a^2c^2)$$

又$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(ac,ab,bc)$，且$(\Delta ABC)^2=\dfrac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|^2$

$$\Rightarrow (\Delta ABC)^2=\frac{1}{4}(b^2c^2+a^2b^2+a^2c^2)$$

$$\therefore (\Delta DAB)^2+(\Delta DBC)^2+(\Delta DAC)^2=(\Delta ABC)^2$$

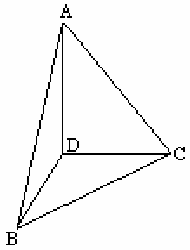


圖 16

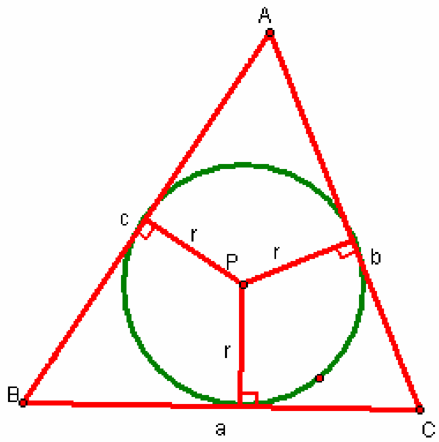


圖 17

(8)如圖 17，三角形中 $r=\frac{\Delta}{s}$ (其中 r 爲內接圓半徑，Δ 爲三角形面積，s 爲 $\frac{a+b+c}{2}$)—(16)

猜想：根據三角形的型式，我們猜想四面體內接球半徑應可寫成體積和其面積和的比值，於是便開始證明。

類推：如圖 16，令 P 爲內心，則 P 到四個平面的距離相等爲 r，而 P 與 ABCD 四點中任意取三點作一個小四面體，共有四個，爲 PABC、PBCD、PACD，PABD 且 r 爲此四個小四面體的高，於是我們可得：

$$V_{\text{PABC}}+V_{\text{PBCD}}+V_{\text{PACD}}+V_{\text{PABD}}=V_{\text{ABCD}}$$

$$\frac{1}{3}r\Delta ABC+\frac{1}{3}r\Delta BCD+\frac{1}{3}r\Delta ACD+\frac{1}{3}r\Delta ABD=V_{\text{ABCD}}$$

$$\Rightarrow r=\frac{V_{\text{ABCD}}}{P}\text{ (其中 P=}\frac{\Delta ABC+\Delta BCD+\Delta ACD+\Delta ABD}{3}\text{)—(17)}$$

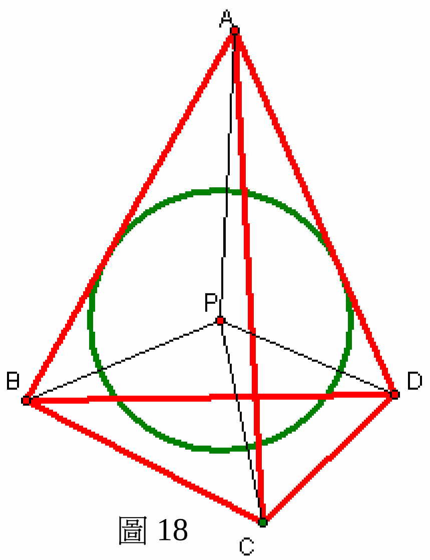


圖 18

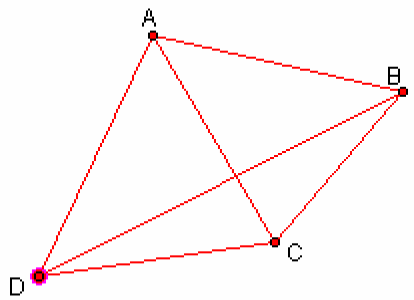


圖 19

猜想：我們在畫四面體的時候發現似乎並非所有的邊長組合都可以構成四面體，所以我們猜想一定有構成四面體的限制與條件，我們先找了一些資料及文獻，發現確實有人做過類似的研究，不過導出的結果都十分的繁雜，實用性不高，於是我們開始想有沒有簡易的方法，正巧當時我們在推廣托勒密定理，發現了一個和三角不等式很相似的式子如下：

托勒密定理：如圖 17 所示，四邊形 ABCD 中

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD}\geq\overline{AC}\cdot\overline{BD}$$
(等號成立於$ABCD$爲圓內接四邊形。) —(18)

(9)三角形中有三角不等式：a+b>c〈兩邊之和大於第三邊〉—(19)

類推：四面體中有六稜不等式：$\overline{BD}\cdot\overline{AC}+\overline{AB}\cdot\overline{CD}>\overline{AD}\cdot\overline{BC}$

Proof：如圖 20，將ΔABC 以$\overline{BC}$爲軸旋轉，設 A 落在平面 BCD 上得 E 點

$\Rightarrow \Delta ABC\cong\Delta BCE$

由托勒密定理平面 BECD 中

$\overline{BD}\cdot\overline{CE}+\overline{BE}\cdot\overline{CD}\geq\overline{ED}\cdot\overline{BC}$

又$\overline{ED}=\overline{EM}+\overline{MD}$且$\overline{AM}+\overline{MD}>\overline{AD}$

$\Rightarrow \overline{ED}>\overline{AD}$

$\Rightarrow \overline{BD}\cdot\overline{AC}+\overline{AB}\cdot\overline{CD}>\overline{AD}\cdot\overline{BC}$—(20)

這個式子對判別是否構成四面體確實很有用，代了好幾組邊都確實符合〈檢驗方法是利用後面所提的幾個體積公式，若邊長代入算出爲負值，則其無法構成四面體〉，於是我們得到了判別構成四面體的方法！

(10)判別構成四面體的方法：

$\overline{BD}\cdot\overline{AC}+\overline{AB}\cdot\overline{CD}>\overline{AD}\cdot\overline{BC}$且四個面皆滿足三角不等式

接下來兩篇獨立出來，特別探討一些有趣的推廣。

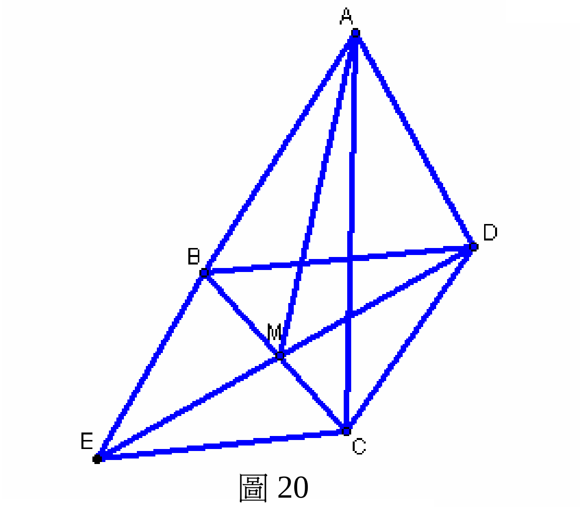


圖 20

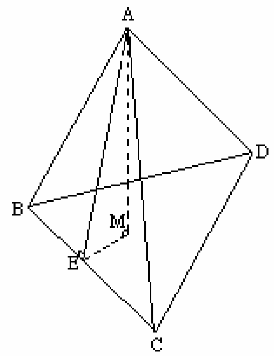


圖 21

三、體積篇：三角形最令人著迷的原因之一便是它求面積的方法五花八門，

本篇將特別獨立出來，探討四面體的體積的求法，並探討特殊四面體的體積，化簡出最實用的式子。

一開始我們便從高中課本找出許多三角形的面積公式，開始把這些公式推廣。

（1）三角形面積求法：$\frac{1}{2}ab\sin\theta$—(21)

猜想：根據三角形的型式，我們猜想四面體體積應可寫成兩面面積和其兩面角的乘積，結果發現單位會差一次，所以就猜測要除掉一個邊長，而引發了下列推想。

類推：四面體體積爲$\frac{2}{3\overline{BC}}S_{ABC}S_{DBC}$ sin<ABC,DBC>—(22)

Proof：如圖 21，四面體體積 V=$\frac{1}{3}S_{DBC}\times\overline{AM}$，而$\frac{1}{2}\overline{AE}\times\overline{BC}=S_{ABC}$，

又$\overline{AM}=\overline{AE}$ sin<ABC,DBC>，故$\overline{AM}=\frac{2}{\overline{BC}}S_{DBC}$ sin <ABC,DBC>

$\Rightarrow V=\frac{2}{3\overline{BC}}S_{ABC}S_{DBC}$ sin <ABC,DBC>。

（2）三角形面積公式$\frac{1}{2\times1}\begin{Vmatrix}1 & 1 & 1\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{Vmatrix}$其中$\Delta ABC$中三頂點分別爲 A（$a_1$，$a_2$）、B（$b_1$，$b_2$）、C（$c_1$，$c_2$）。—(23)

類推：四面體體積公式$\frac{1}{3\times2\times1}\begin{Vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\end{Vmatrix}$其中四頂點爲 A（$a_1$，$a_2$，$a_3$）、B（$b_1$，$b_2$，$b_3$）、C（$c_1$，$c_2$，$c_3$）、D（$d_1$，$d_2$，$d_3$）—(24)

Proof： 設$\overrightarrow{AB}$=（b_1-a_1，b_2-a_2，b_3-a_3）＝（a_4，a_5，a_6），$\overrightarrow{AC}$=（c_1-a_1，c_2-a_2，c_3-a_3）＝（b_4，b_5，b_6），$\overrightarrow{AD}$=（d_1-a_1，d_2-a_2，d_3-a_3）＝（c_4，c_5，c_6），四面體體積爲$\frac{1}{6}\begin{Vmatrix}a_4 & b_4 & c_4\\ a_5 & b_5 & c_5\\ a_6 & b_6 & c_6\end{Vmatrix}$＝

$$\frac{1}{3\times2\times1}\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0 & 0\\ a_1 & b_1-a_1 & c_1-a_1 & d_1-a_1\\ a_2 & b_2-a_2 & c_2-a_2 & d_2-a_2\\ a_3 & b_3-a_3 & c_3-a_3 & d_3-a_3\end{matrix}\right\| = \frac{1}{3\times2\times1}\left\|\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\end{matrix}\right\|$$（降階公式之逆推）。

海龍公式推廣的過程遇到的阻力最大，我們再次定義一些新的符號，簡化式子的複雜程度。

（3）三角形的三邊求積公式：$S=\frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4}$ (海龍公式之展開) —(25)

類推：四面體也有以六稜求體積公式，$V=\frac{1}{12}\sqrt{q_1+q_2+q_3-q}$ ，

其中
$$\begin{aligned}q_1&=(ae)^2(b^2+c^2+f^2+g^2-a^2-e^2),\\ q_2&=(bf)^2(a^2+c^2+e^2+g^2-b^2-f^2),\\ q_3&=(cg)^2(a^2+b^2+e^2+f^2-c^2-g^2),\\ q&=(abc)^2+(afg)^2+(beg)^2+(cef)^2.\end{aligned}$$

Proof：

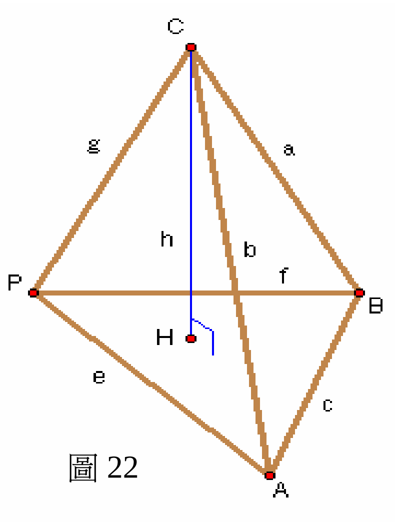


圖 22

如圖 22，

$\because \Delta PAB$ 的面積=$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}\right|$ 又

$\because$ 高 h=$\overline{CH}=\left|\overrightarrow{PC}\right|\cos\angle PCH=\left|\overrightarrow{PC}\right|\cdot\frac{\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB})}{\left|\overrightarrow{PC}\right|\left|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}\right|}=\frac{\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB})}{\left|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}\right|}$

$\Rightarrow$ 體積 V=$\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB})\right|$ ，設 $\overrightarrow{PA}=(x_1,x_2,x_3)$ $\overrightarrow{PB}=(y_1,y_2,y_3)$

$\overrightarrow{PC} = (z_1, z_2, z_3)$

$$V^2 = \frac{1}{36}\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{Vmatrix} = \frac{1}{36}\begin{Vmatrix} \overrightarrow{PA}^2 & \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} & \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC} \\ \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PA} & \overrightarrow{PB}^2 & \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC} \\ \overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA} & \overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB} & \overrightarrow{PC}^2 \end{Vmatrix}$$

將
$$\begin{aligned} &\overrightarrow{PA}^2 = e^2, \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = ef\cos\angle APB = \frac{1}{2}(e^2+f^2-c^2), \overrightarrow{PB}^2 = f^2 \\ &\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC} = \frac{1}{2}(f^2+g^2-a^2), \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC} = \frac{1}{2}(e^2+g^2-b^2), \overrightarrow{PC}^2 = g^2 \end{aligned}$$
代入

得 $$V^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 2e^2 & e^2+f^2-c^2 & e^2+g^2-b^2 \\ e^2+f^2-c^2 & 2f^2 & f^2+g^2-a^2 \\ e^2+g^2-b^2 & f^2+g^2-a^2 & 2g^2 \end{vmatrix} \text{—〈26〉}$$

此為任意四面體的六稜求積公式,展開後可將它改記為

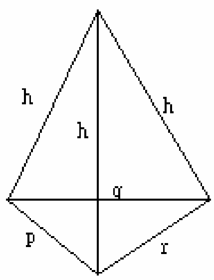
$$V = \frac{1}{12}\sqrt{q_1+q_2+q_3-q}$$

其中
$$\begin{aligned} q_1 &= (ae)^2(b^2+c^2+f^2+g^2-a^2-e^2) \\ q_2 &= (bf)^2(a^2+c^2+e^2+g^2-b^2-f^2) \\ q_3 &= (cg)^2(a^2+b^2+e^2+f^2-c^2-g^2) \\ q &= (abc)^2+(afg)^2+(beg)^2+(cef)^2 \end{aligned} \text{—(27)}$$

導出六稜求積公式後我們一邊驗證這個公式，一邊推導特殊的四面體體積公式，發現有一些式子有著優美的對稱性，於是在此把它作為研究的一部分。

定義 10：若四頂點中有一頂點以上到另外三頂點等距稱為等腰四面體。

圖 23



（4）$V_{等腰}=\frac{1}{12}\sqrt{16h^2w(w-p)(w-q)(w-r)-p^2q^2r^2}$，其中 p、q、r 爲底面邊長，h 爲腰長，$w=\frac{(p+q+r)}{2}$

Proof：

根據四面體六稜求積公式，將 e→p,f→q,c→r,a、b、g→h，如圖 23

得$V=\frac{1}{12}\sqrt{q_1+q_2+q_3-q}$

其中
$$\begin{aligned}
q_1&=(ph)^2(h^2+r^2+q^2+h^2-h^2-p^2)\\
q_2&=(qh)^2(r^2+h^2+h^2+p^2-h^2-q^2)\\
q_3&=(rh)^2(h^2+h^2+p^2+q^2-r^2-h^2)\\
q&=(h^2r)^2+(h^2q)^2+(h^2p)^2+(pqr)^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow V^2=\frac{1}{144}(p^2r^2h^2+p^2q^2h^2-p^4h^2+q^2r^2h^2+p^2q^2h^2-q^4h^2+p^2r^2h^2+q^2r^2h^2-r^4h^2-p^2q^2r^2)$$

$$=\frac{1}{144}[h^2(p^2r^2+p^2q^2-p^4+q^2r^2+p^2q^2-q^4+p^2r^2+q^2r^2-r^4)-p^2q^2r^2]$$

$$=\frac{1}{144}[h^2(p+q+r)(q+r-p)(p+q-r)(p+r-q)-p^2q^2r^2]$$

$$=\frac{1}{144}\{16h^2[\frac{(p+q+r)}{2}][\frac{(p+q+r)}{2}-p][\frac{(p+q+r)}{2}-q][\frac{(p+q+r)}{2}-r]-p^2q^2r^2\}$$

令$w=\frac{(p+q+r)}{2}$

$$\Rightarrow V_{等腰}=\frac{1}{12}\sqrt{16h^2w(w-p)(w-q)(w-r)-p^2q^2r^2}\text{ —(28)}$$

定義 11：三組對稜分別相等之四面體爲等面四面體。

（5）$V_{等面}=\frac{1}{3}\sqrt{(u^2-a^2)(u^2-b^2)(u^2-c^2)}$ ，其中$\frac{(a^2+b^2+c^2)}{2}=u^2$

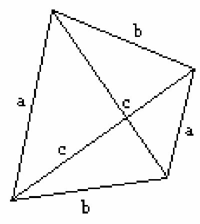


圖 24

Proof：根據六稜求積公式 e→a,f→b,g→c，如圖 24，$V=\frac{1}{12}\sqrt{q_1+q_2+q_3-q}$ ，

$$q_1=a^4(2b^2+2c^2-2a^2),$$
$$q_2=b^4(2a^2+2c^2-2b^2),$$
$$q_3=c^4(2a^2+2b^2-2c^2),$$
$$q=4(abc)^2$$

$\because q_1+q_2+q_3-q$ 爲輪換式

$\therefore$以 $a^2=b^2+c^2$ 代入

$\Rightarrow q_1+q_2+q_3-q=0$

故可知 $q_1+q_2+q_3-q=0$ 有 $b^2+c^2-a^2$ 此因式

$\therefore$可設 $q_1+q_2+q_3-q=k(a^2+b^2-c^2)(c^2+b^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)$

比較係數後，可得 k=2

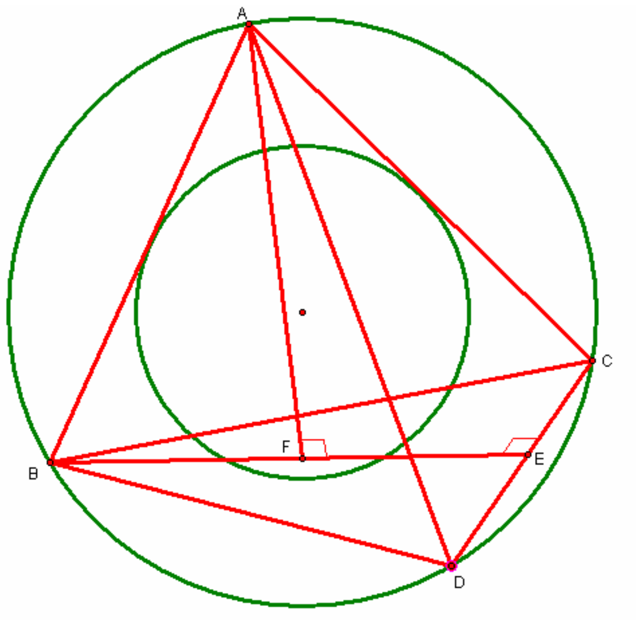
$\therefore$可得原式爲 $\frac{1}{12}\sqrt{2(a^2+b^2-c^2)(c^2+b^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}$ ，

經整理過後，將 $\frac{(a^2+b^2+c^2)}{2}$ 以 u^2 代入

可得 $V_{等面}=\frac{1}{3}\sqrt{(u^2-a^2)(u^2-b^2)(u^2-c^2)}$ —(29)

四、外接球半徑篇：在高中課程中曾教過正四面體的外接球半徑，於是我們試著去了解外接球半徑是否有簡易的通式，一開始困難重重，試了好多種方法都徒勞無功，最後嘗試幾種特殊四面體的例子，比較各個式子想發現規律，卻仍無從下手，最後利用角度連接半徑和邊長的途中，突然發現跟體積有關係，於是便從體積下手整理出通式。

圖 25



(1)正四面體外接球半徑 $R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$

Proof:如圖 25、26，由 ABE 平面切下去，令 R 為外接球半徑，r 為內接球半徑 $\overline{BF}=\frac{\sqrt{3}}{3}a,\overline{AF}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$ ，

R+r $=\frac{\sqrt{6}}{3}a$ ， $R^2-r^2=\frac{1}{3}a^2$ ，(R-r)(R+r)= $\frac{1}{3}a^2$

(R-r) $\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{1}{3}a^2$ ，

$\Rightarrow R-r=\frac{a}{\sqrt{6}}$ ，

$\Rightarrow 2R=\frac{\sqrt{6}}{2}a$

$\Rightarrow R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$—(34)

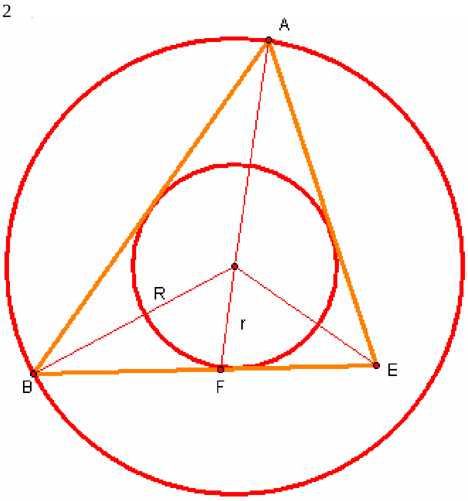


圖 26

觀察等面四面體，發現對稜中點連線是這對稜的公垂線，且三條公垂線兩兩互相垂直平分於外心。試證明如下：

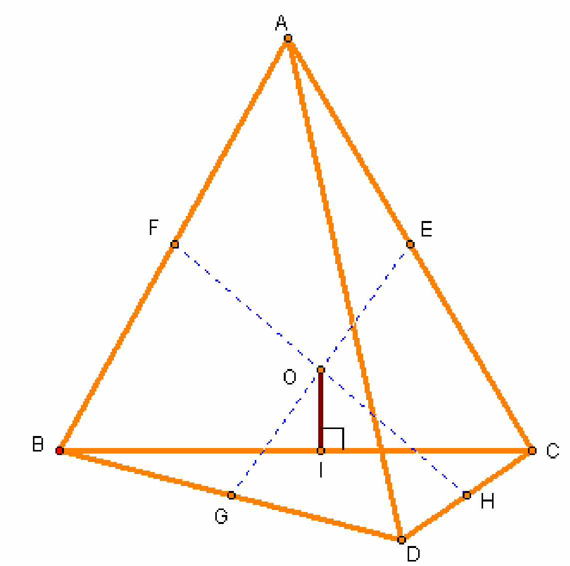


圖 27

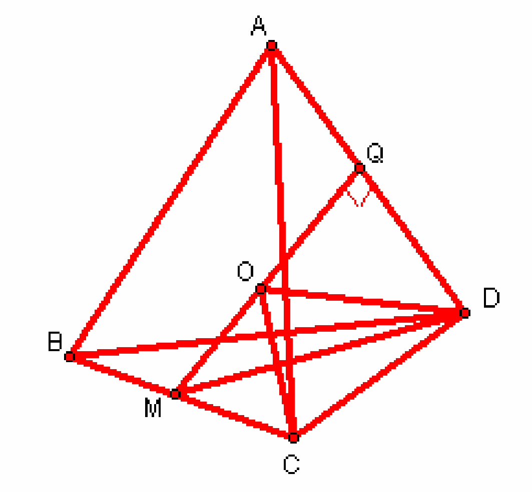


圖 28

Proof.：(1)如圖 27，將其中一組對稜中點連線得 $\overline{EG}$ 。

$\because \Delta ABC\cong\Delta ACD\Rightarrow\overline{ED}=\overline{EB}$(中線對應相等)。

$\because \overline{EG}$ 過 $\overline{BD}$ 中點且線上一點至兩端等距 $\Rightarrow \overleftrightarrow{EG}$ 爲 $\overline{BD}$ 之中垂線，同理 $\overleftrightarrow{EG}$ 爲 $\overline{AC}$ 中垂線。故可得對稜中點連線是這對稜之公垂線。

(2)取 $\overline{EG}$ 中點 O，$\because \overline{OG}=\overline{OE}$，$\overline{OD}^2=\overline{OG}^2+\overline{GD}^2=\overline{OE}^2+\overline{CE}^2=\overline{OC}^2$，故可得 $\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OA}=\overline{OD}$，再做另一組對稜中點連線 $\overline{FH}$，取 $\overline{FH}$ 中點 O' 點，同理 $\overline{O'B}=\overline{O'C}=\overline{O'A}=\overline{O'D}$，因爲至四頂點等距必爲外心，故 O、$O'$ 重合，同理可得三條公垂線交於一點。

(3)$\because \overline{EG}$、$\overline{FH}$ 交於一點，故 EFGH 四點共面，又 $\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GH}=\overline{EH}$，得四邊形 EFGH 爲菱形，又菱形對角線互相垂直平分，故可知 $\overline{EG}$、$\overline{FH}$ 互相垂直平分於外心，同理可得三條公垂線兩兩垂直平分於外心。

(4)綜合(1)、(2)、(3)得證。

(2)等面四面體之外接球半徑：$R=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Proof：如圖 28，四面體 ABCD 中 O 爲其外心，M、Q 分別爲爲 $\overline{BC}$、$\overline{DA}$ 中點令 $\overline{BC}=b$，$\overline{BD}=a$，$\overline{CD}=c$

$\overline{MQ}\perp\overline{DA}$ 且 $\overline{OQ}=\dfrac{\overline{MQ}}{2}$〈前頁已證〉

$$\overline{MD}^2=c^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-cb\cos\angle BCD$$

$$\overline{MQ}^2=\overline{MD}^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+c^2-b^2}{2}$$

$$R^2=\overline{OD}^2=\overline{OQ}^2+\overline{QD}^2=\frac{a^2+c^2-b^2}{8}+\frac{b^2}{4}=\frac{a^2+b^2+c^2}{8}$$

$$\Rightarrow R=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2+b^2+c^2} \text{ —(35)}$$

這個式子若把 b、c 改成 a 便可得到正四面體的外接球半徑，之間是可連通的！

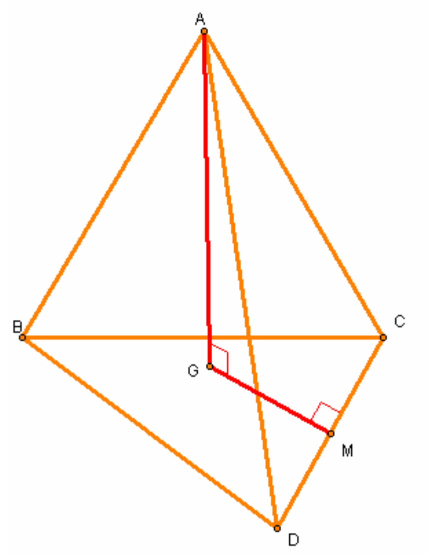


圖 29

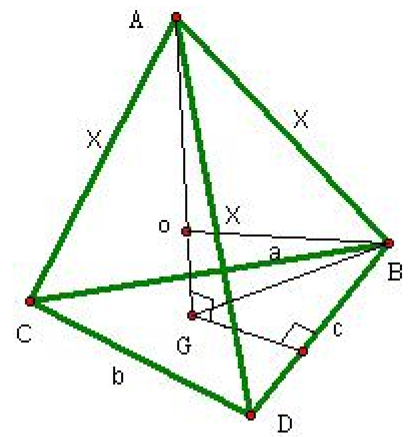


圖 30

觀察等面四面體，發現等腰四面體頂點 A(三腰之交點)投影至底面三角形之點為此底面三角形之外心。

Proof：

如圖 29，由 A 作ΔBCD之垂線交ΔBCD於 G，由 G 作$\overline{CD}$之垂線交其於 M。

$\because \overline{AG}\perp\overline{GM}$又$\overline{GM}\perp\overline{CD}\Rightarrow\overline{AM}\perp\overline{CD}$(三垂線定理)，得$\overline{AM}$為$\Delta ACD$的高。

又等腰三角形中高必為中垂線，故 M 為$\overline{CD}$之中點$\Rightarrow\overline{GM}$為ΔBCD之一條中垂

線，同理可得 G 為ΔBCD中其他中垂線之交點，故 G 為ΔBCD之外心。

(3)等腰四面體之外接球半徑：

$$R=\frac{x^2}{2\sqrt{x^2-r^2}}$$

其中$r=\dfrac{abc}{4\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}$、$a,b,c$表底面$\Delta$三邊

S為$\dfrac{a+b+c}{2}$、x為腰長、r為底面外接圓半徑

Proof：如圖 30，由 A 作ΔBCD 之垂線則 O 為四面體外心，G 為底三角形外心，令此四面體外接球半徑為 R，底面外接圓半徑為 r，三個腰為 x

$$\overline{OG}=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{x^2-r^2}-R$$

$$R^2-r^2=x^2-r^2-2R\sqrt{x^2-r^2}+R^2$$

$$\Rightarrow R=\frac{x^2}{2\sqrt{x^2-r^2}}\text{—(36)}$$

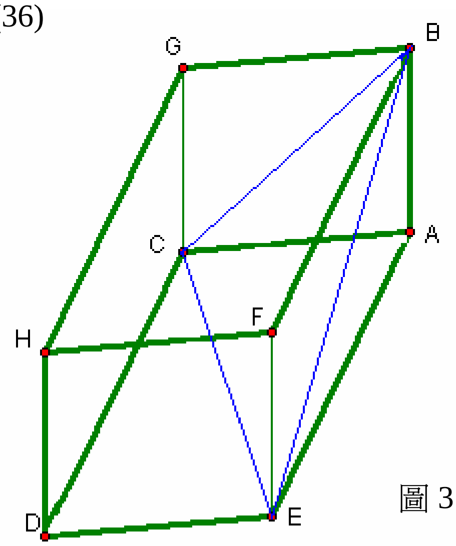


圖 31

(4) 直角四面體 $R=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$(其中 a、b、c 為三個互相垂直之邊)

Proof：如圖 31，直角四面體 ABCE 為長方體內四點所構成，取長方體中心 P，則 P 至八頂點等距，故 P 也為直角四面體 ABCE 之外心，又 P 為對角線中點。

$$\Rightarrow R=\overline{PE}=\frac{\overline{EG}}{2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}\text{—(37)}$$

接下來就往外接球半徑的通式出發吧！

引理 1：在球面上令四個點為 0,1,2,3，球心到這四點向量為r_0,r_1,r_2,r_3，而此四個向量有公共值為 h。在高中課程中提到一個平面向量可為另兩個向量的線性組合，在空間中向量也存在這個特性，於是此四個向量r_0,r_1,r_2,r_3必也存在一個齊次線性關係，因此可得方程式：

$$xr_0+yr_1+zr_2+wr_3=0\text{—(38)}$$

其中係數 x,y,z,w 不同時全為 0，將此方程式依次與r_0,r_1,r_2,r_3相乘，可得四個方程式：

$$\begin{aligned}r_0r_0x+r_0r_1y+r_0r_2z+r_0r_3w=0\\ r_1r_0x+r_1r_1y+r_1r_2z+r_1r_3w=0\\ r_2r_0x+r_2r_1y+r_2r_2z+r_2r_3w=0\\ r_3r_0x+r_3r_1y+r_3r_2z+r_3r_3w=0\end{aligned}$$

因四個方程式有無限多解，則方程式的係數行列式必定等於 0。因此，

$$\begin{vmatrix} r_0r_0 & r_0r_1 & r_0r_2 & r_0r_3 \\ r_1r_0 & r_1r_1 & r_1r_2 & r_1r_3 \\ r_2r_0 & r_2r_1 & r_2r_2 & r_2r_3 \\ r_3r_0 & r_3r_1 & r_3r_2 & r_3r_3 \end{vmatrix} = 0$$

我們用 $h^2\cos nv$ 來代表每個內積 $r_n \cdot r_v$ (其中 n,v $\in \{0,1,2,3\}$，h 爲外接球半徑)，每元乘 2 後以 H 表 $2h^2$ 得

$$\begin{vmatrix} H\cos 00 & H\cos 01 & H\cos 02 & H\cos 03 \\ H\cos 10 & H\cos 11 & H\cos 12 & H\cos 13 \\ H\cos 20 & H\cos 21 & H\cos 22 & H\cos 23 \\ H\cos 30 & H\cos 31 & H\cos 32 & H\cos 33 \end{vmatrix} = 0 \text{—(39)}$$

引理 2：令稜長 e、f、g、a、b、c 的平方爲 E、F、G、A、B、C 來代換可得由式〈26〉升階後得六稜求積公式的另一形式。

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 2E & E+F-C & E+G-B \\ 0 & F+E-C & 2F & F+G-A \\ 0 & G+E-B & F+G-A & 2G \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 288V^2 = \begin{vmatrix} -E & E & F-C & G-B \\ -F & E-C & F & G-A \\ -G & E-B & F-A & G \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -E & E & F-C & G-B & 1 \\ -F & E-C & F & G-A & 1 \\ -G & E-B & F-A & G & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & E & F & G & 1 \\ E & 0 & C & B & 1 \\ F & C & 0 & A & 1 \\ G & B & A & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \text{—(40)}$$

右式依最後一行降階後可得四項 M_1、M_2、M_3、M_4，其中

$$M_1=\begin{vmatrix}E&0&C&B\\F&C&0&A\\G&B&A&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}，M_2=\begin{vmatrix}0&E&F&G\\F&C&0&A\\G&B&A&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}，M_3=\begin{vmatrix}0&E&F&G\\E&0&C&B\\G&B&A&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}，$$

$$M_4=\begin{vmatrix}0&E&F&G\\E&0&C&B\\F&C&0&A\\1&1&1&1\end{vmatrix}$$

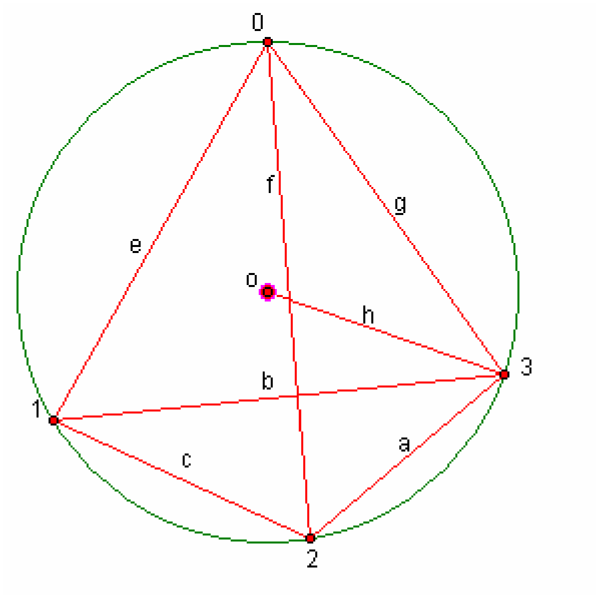


圖 32

(5)三角形中 4△h=abc〈其中 h 爲外接圓半徑，△爲三角形面積，abc 爲三角形三邊。〉

類推：四面體外接球半徑的通式爲：6hV=j〈其中 h 爲外接球半徑，V 爲四面體體積，j 爲以四面體三組對稜乘積爲三邊長的三角形的面積〉。

Proof：

如圖 32，令四面體的各頂點爲 0,1,2,3，外接球半徑爲 h，各稜 01,02,03,23,31,12 爲 e,f,g,a,b,c，它們的平方爲 E,F,G,A,B,C 四面體體積爲 V。我們對每個餘弦給於一個因子 H= $2h^2$，並根據餘弦定理來更換引理 1-式 39 中各元，例如以 H-E 替換 Hcos01，H-F 替換 Hcos02，H-A 替換 Hcos23 等等，Hcos00 和對角線的其他個元也可用 H 代替改變所有各元的符號後，便可得

$$\begin{vmatrix}-H&E-H&F-H&G-H\\E-H&-H&C-H&B-H\\F-H&C-H&-H&A-H\\G-H&B-H&A-H&-H\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}-H&E-H&F-H&G-H&1\\E-H&-H&C-H&B-H&1\\F-H&C-H&-H&A-H&1\\G-H&B-H&A-H&-H&1\\0&0&0&0&1\end{vmatrix}=0$$

我們將末行乘以 H 加到各行，便得到，

$$\begin{vmatrix} 0 & E & F & G & H \\ E & 0 & C & B & H \\ F & C & 0 & A & H \\ G & B & A & 0 & H \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

我們用最後一行來進行降階分別爲 $HM_1, HM_2, HM_3, HM_4, M_5$ ，可得

$$H(M_1 + M_2 + M_3 + M_4) + M_5 = 0$$

根據我們引理 2-式 40，我們可得

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 288V^2$$

由上述的兩個方程式得

$$288HV^2 = -M_5 \text{—(41)}$$

這裡 $M_5 = \begin{vmatrix} 0 & E & F & G \\ E & 0 & C & B \\ F & C & 0 & A \\ G & B & A & 0 \end{vmatrix}$ ，經展開得

$-M_5 = 2QR + 2RP + 2PQ - P^2 - Q^2 - R^2$，其中 P,Q,R 分別爲 AE,BF,CG，再以 $a^2, b^2, c^2, e^2, f^2, g^2$ 替代 A,B,C,E,F,G，並將各對稜的乘積 ae,bf,cg 記作 p,q,r，則上述公式可改寫爲

$$-M_5 = 2q^2r^2 + 2p^2r^2 + 2p^2q^2 - p^4 - q^4 - r^4$$

如果我們將 p,q,r 作爲一個三角形的各邊,那麼上述公式的右邊(根據海龍公式)就表示這個三角形面積 j 的平方的 16 倍。再將式-41 中 H以$2h^2$ 代換，可得

$$576h^2V^2 = 16j^2$$

$$\Rightarrow 6hV = j \text{—(42)}$$

這個公式可用文字來表達：
一個四面體的體積和其外接球半徑的乘積的六倍等於以四面體三組對稜乘積(ae,cg,bf)爲三邊長的三角形的面積。

三角形還有許多優美的幾何公式等待推廣，不過大部分皆爲高中生少見的公式，礙於時間目前才剛起步。

五、其他發現：

接下來我們嘗試一下平行四邊形與平行六面體的類比。

〈1〉平行四邊形定理：

如圖 33，平行四邊形 ABCD 中，$\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)$—(43)

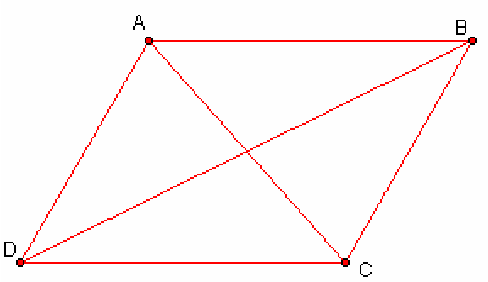


圖 33

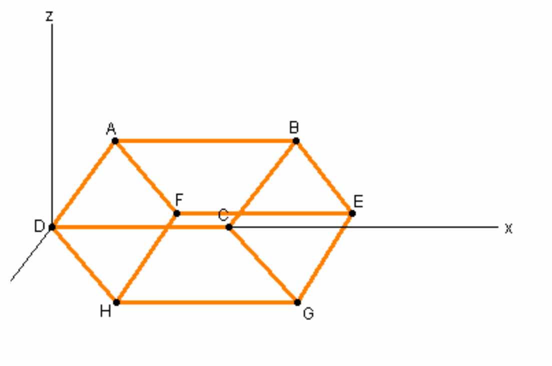


圖 34

類推：如圖 34，平行六面體定理 $S_{ADGE}^2+S_{BCFH}^2=2(S_{ABCD}^2+S_{ADHF}^2)$

Proof：取一頂點 D 爲座標原點。設 A(a,b,c)、H(d,e,0)、C(f,o,o)、B(a+f,b,c)、E(d+f+a,e+b,c)、G(d+f,e,0)、F(a+d,b+e,c)則

$$S_{ABCD}=\left|\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DC}\right|=\left\|\begin{matrix}1&1&1\\a&b&c\\f&0&0\end{matrix}\right\|,$$

$$S_{ADHF}=\left|\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DH}\right|=\left\|\begin{matrix}1&1&1\\a&b&c\\d&e&0\end{matrix}\right\|,$$

$$S_{ADGE}=\left|\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DG}\right|=\left\|\begin{matrix}1&1&1\\a&b&c\\d+f&e&0\end{matrix}\right\|,$$

$$S_{BCFH}=\left|\overrightarrow{FB}\times\overrightarrow{FH}\right|=\left\|\begin{matrix}1&1&1\\a&b&c\\d-f&e&0\end{matrix}\right\|,$$

$$\Rightarrow S_{ADGE}^2 + S_{BCFH}^2 = 2(S_{ABCD}^2 + S_{ADHF}^2) \text{—(44)}$$

陸、研究成果與討論

這次的研究中，我們成功發現了四面體的下列推廣：

1. 全等性質、維維安尼定理。
2. 投影、餘弦、正弦、畢氏定理。
3. 西瓦、孟氏、內分比。
4. 三角不等式、海龍公式、內接球半徑。

也發現了許多四面體的性質、公式，如下：

1. 特殊四面體的外接球半徑、體積。
2. 四面體外接球半徑的通式。
3. 四面體兩面角公式，三面角性質。

有些則是猜想失敗，但我們也找出反例證明之(附錄)

並且由平行四邊形定理類比到平行六面體定理，不過尚未研究完全，希望未來能發現更多類推中隱藏之美！

柒、心得

上高中後第一次對幾何如此深入的研究，發現數學課本並不只是一堆煩躁的公式，所學的課程也是可以實際應用於研究上。推廣數學課本的東西作起來實在很有成就感，從這次研究中，我們發現「推廣」是很重要的，不但可以對基礎更加的穩固，還可以依照原理一一地找出目標，這就是我們最大的樂趣，而公式不再是靠死背的模式存活在我的腦袋裡。平面幾何雖已發展了好幾世紀，大部分的平面性質也都廣爲人知，但在空間幾何中的一些類比性質卻還鮮爲人知，也就是說空間幾何還是一門很新的學問，我們期望我們能夠在空間中最基本的四面體中整理出一套完整的系統，從此出發，一如平面幾何從三角形出發一般！

捌、未來展望

一、三角形的性質太多了，我們沒有辦法全部都一一找出來，只能盡可能的利用平常上課的一些性質和書上查得到的推導，所以我們希望未來能夠做更多性質的推導。

二、我們的研究過程中，我們所研究的完的東西有時會有一些冗長的式子，而失去類比的性質，所以我們希望能夠再做更簡化的動作，或是找出其它的規律再把這些規律以符號來代替，像是海龍公式的形式。

三、 希望能以另一種非紙筆計算的類比方式(例: 模型輔助、程式)類比出和紙筆計算相同之變數關係。

四、 未來研究方向

1. 四面體的相似性質。
2. 四面體內心的定義。
3. 三角形其他定理之類比。
4. 朝其他多面體的方向去發展。

玖、參考資料及其他

（1）左銓如、季素月著/初等幾何研究/九章出版社。
（2）黃家禮著/幾何明珠/九章出版社。
（3）高中數學第三冊/南一書局。
（4）42 屆高中科展---由三角形到三角錐/高雄女中。
（5）<德>海因里希 • 德里著/100 個著名初等數學問題歷史和解答/凡異出版社。

評　　　語

040406　三角形到四面體的完全類比

1. 作者曾經花功夫來收集參考資料。

2. 有關立體幾何的研究，作者可以考慮使用動態幾何軟體 Cabri 3D。

3. 作者可以參考 Nathan Altshiller-Court: Modern Pure Solid Geometry 一書。該書包含豐富的四面體的相關定理。