

# 九十一年度高雄女中指定科目模擬考(三) RA531

壹、選擇題 (1~2 單一選擇題，每題 5 分，3~7 重選擇題，每題 8 分)

- 擲一骰子，若第一次出現  $a$  點，第二次出現  $b$  點，在  $a+b=7$  的條件下，則第二次出現 3 點的機率為：\_\_\_\_\_。(1)  $\frac{1}{6}$  (2)  $\frac{1}{3}$  (3)  $\frac{1}{2}$  (4)  $\frac{2}{3}$  (5)  $\frac{5}{6}$
- 設  $a+bi$  為複數  $8i$  的立方根，其中  $a<0$ 、 $b>0$ ，則下列何者為真？\_\_\_\_\_。  
(1)  $a=-1$  (2)  $a=-\sqrt{3}$  (3)  $b=-\frac{1}{2}$  (4)  $b=\sqrt{3}$  (5)  $b=\frac{1}{2}$
- 設正整數  $n$  的個位數字以  $f(n)$  表之，並令  $a_n = f(n^2) - f(n)$ ，又  $a_n=0$  的正整數  $n$  由小而大依序列出  $n_1$ 、 $n_2$ 、 $n_3$ 、 $\dots$ ，則下列敘述哪些是正確的？\_\_\_\_\_。  
(1)  $a_5=0$  (2)  $a_6=a_{10}$  (3)  $\sum_{n=1}^{98} a_n=8$  (4)  $n_3=7$  (5)  $n_{50}=125$
- 設四曲線為  $\Gamma_1: f_1(x)=a^x$ 、 $\Gamma_2: f_2(x)=a^{-x}$ 、 $\Gamma_3: f_3(x)=-\log_{\frac{1}{a}} x$ 、 $\Gamma_4: f_4(x)=\log_{\frac{1}{a}} x$ ，其中實數  $a>0$ 、 $a\neq 1$ ，則下列哪些敘述是正確的？\_\_\_\_\_。  
(1) 曲線  $\Gamma_1$  與  $\Gamma_2$  有交點 (2) 曲線  $\Gamma_3$  與  $\Gamma_4$  不相交  
(3) 曲線  $\Gamma_2$  與  $\Gamma_4$  對稱於直線  $x+y=0$  (4) 曲線  $\Gamma_1$  與  $\Gamma_3$  對稱於直線  $x-y=0$   
(5) 曲線  $\Gamma_2$  與  $\Gamma_4$  互為反函數
- 下列敘述哪些是正確的？\_\_\_\_\_。  
(1)  $\sin 3$  有意義 (2)  $\tan \frac{5\pi}{2}$  有意義 (3) 若  $\sec x = \frac{\pi}{2}$ ，則  $x$  有實數解  
(4) 若  $\cos x = \frac{\pi}{3}$ ，則  $x$  有實數解 (5) 點座標  $(\tan 3, \sec(-2))$  落在第三象限。
- 空間中一直線  $L: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{-2}$  上一點  $P$  到球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 4 = 0$  上一點  $Q$  之最小距離為  $\overline{PQ}$ ，則下列何者正確？\_\_\_\_\_。  
(1) 球面  $S$  之球心座標為  $(-1, 0, -2)$  (2) 球面  $S$  的半徑為 1

(3)  $P$  點之座標為  $(1, 6, -1)$  (4)  $Q$  點之座標為  $(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3})$  (5)  $\overline{PQ} = 2$

7. 動點  $P$  至直線  $L: x - y = 0$  之距離與  $P$  至定點  $A(-a, a)$  之距離比為  $1:\sqrt{2}$ ,  $a \neq 0$ ,

令  $\Gamma$  表  $P$  之軌跡圖形, 則下列各選項何者正確? \_\_\_\_\_.

(1)  $\Gamma$  表雙曲線 (2)  $\Gamma$  表橢圓 (3)  $\Gamma$  之方程式為  $xy + ax - ay + a^2 = 0$

(4)  $\Gamma$  之方程式為  $xy - ax + ay - a^2 = 0$  (5)  $\Gamma$  之對稱中心為  $(a, -a)$

貳、填充題：(第 A 至 E 題, 每題 5 分, )

A. 設  $n$  為自然數,  $n > 1$ , 若以  $n$  分別去除 395、686、1171、2238 之餘數均相同, 求  $n$  之值為 \_\_\_\_\_。

B. 在  $\triangle ABC$  中,  $H \in \overline{BC}$  且  $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ , 令  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{b}$ 。若  $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{3}$ ,

$|\overrightarrow{b}| = \sqrt{2}$ ,  $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 1$ , 且  $\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{a} + j\overrightarrow{b}$ ,  $k, j \in \mathbb{R}$ , 則數對  $(k, j) =$  \_\_\_\_\_。

C. 將拋物線  $y = x^2 + 2x - 1$  沿著  $y = \frac{x}{2} - 3$  平行移動, 使其與直線  $y = 2x - 7$  相切, 請

問：(1) 移動後之拋物線方程式為 \_\_\_\_\_。

(2) 移動後與直線相切的切點座標為 \_\_\_\_\_。

D. 設集合  $S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$  的各部分集中, 恰含三個相異元素的子集剛好有  $N$  種, 且分別記為  $S_1, S_2, \dots, S_N$ , 而  $S_k$  的三個元素之和以  $a_k$  表示,  $1 \leq k \leq N$ , 求

$\sum_{k=1}^N a_k =$  \_\_\_\_\_。

E. 一均勻骰子連續擲三次, 若依次出現點數  $a, b, c$ , 則使方程組 
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 0 \end{cases}$$

有非零之解的機率為 \_\_\_\_\_。

貳、計算證明題

1. 四邊形  $ABCD$  中, 若  $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2$ , 試證明:  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 。(10 分)

2. 設  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ , 且  $X, Y$  均為二階方陣, 滿足  $X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 、 $XY = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 、

$aX + bY = A$ , 其中  $a > b$ ,  $a, b$  為定數, 試求：(1) 數對  $(a, b)$  之值。(5 分)

(2) 矩陣  $X^{10}$ 。(5 分)

RA531 高雄女中 91 學年度第三次模擬測驗答案

選擇題：1.(1) 2.(2) 3.(1)(2)(3)(5) 4.(1)(4)(5) 5.(1)(3)(5) 6.(2)(4)(5) 7.(1)(3)(5)

壹、填充題：A.97 B. $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  C.(1)  $y = (x-3)^2$  (2)(4, 1) D.1980 E. $\frac{4}{9}$

貳、計算證明題：1.見解析 2.(1)(5, -2) (2) $X^{10} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$