

國立臺中文華高級中學 101 學年度第一次教師甄選
數學科試題本

測驗說明：

本試卷分三部份，前二部分為填充題，不需計算過程，但答案中若有分式需化至最簡，根式需有理化，否則不予計分；第三部分為計算證明題，需詳列計算過程或說明理由，否則不予計分。

填充題：（第一部份，每格 4 分）

1. 設兩圖形 $\Gamma: \frac{(x-1)^2}{n^2} + y^2 \leq 1$, $\Gamma': (x+3)^2 + \frac{(y+2)^2}{n^2} \leq 1$ (其中 $n \geq 10$)，其相交部份的面積為 a_n ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ _____。
2. 設 a 為實數，且 $x^2 + ax + (8-a) = 0$ 的兩根都大於 3，則 a 的範圍為_____。
3. 考慮滿足 $a^2 + b^2 = 49$ ， $c^2 + d^2 - 16c - 12d = -96$ 的所有實數 a, b, c, d ，求 $\sqrt[3]{16c + 12d - 2ac - 2bd - 47}$ 的最小值為_____。
4. 設 n 為一個 101 位數的正整數，且能被 9 整除。令 n 的所有位數之和為 a ， a 的所有位數之和為 b ，則 b 的所有可能值之和為_____。
5. 試求 $\int_1^2 (x^3 - 5x^2 + x - 6)(x-1)^3 dx$ 的值。
6. 一個實係數三次多項式函數通過 $(101, 2012)$ 、 $(99, 2008)$ 、 $(102, 2005)$ 、 $(103, 2016)$ 四點，求此函數的切線中，斜率最小的切線所在的直線方程式為_____。
7. 將一列 n 個 ($n \geq 2$) 的小方格中最左邊的黑棋向右移動，每次移動 1 或 2 格，直至最右邊的小方格為止。假設由最左移至最右有 a_n 種移動方法，每種移動方法的機會均等，「移動次數」的期望值為 E_n ，求數對 (a_7, E_7) 為_____。

--	--	--	--	--	--	--
8. $\triangle ABC$ 中， $A(2, -4)$ ，若 $\angle B$ 、 $\angle C$ 之角平分線分別為 $L_1: x + y - 2 = 0$ 及 $L_2: x - 3y - 6 = 0$ ，則 \overline{BC} 之方程式為_____。

填充題：（第二部份，每格 6 分）

9. 有一組正整數 $a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ 使得 $\frac{4}{7} = \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \frac{a_4}{4!} + \frac{a_5}{5!} + \frac{a_6}{6!} + \frac{a_7}{7!}$ ，其中 $0 \leq a_i < i$ ($i = 2, 3, 4, 5, 6, 7$)，求數對 $(a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7) =$ _____。

10. 設甲、乙兩袋中，甲袋有 1 白球 1 黑球，乙袋有 1 白球，從甲袋隨機取 1 球放入乙袋後，再從乙袋隨機取 1 球放回甲袋，完成這樣的動作稱為一局，試求 n 局後甲袋有 1 白球 1 黑球的機率為_____。（答案請以 n 表示）
11. 實數 a, b 滿足 $(a+bi)^{101} = a-bi$ (其中 $i = \sqrt{-1}$)，則數對 (a, b) 有_____組解。
12. $y = [x]$ 表高斯函數，求 $\sum_{k=1}^{40} [10^{\frac{k}{40}}] =$ _____。
13. 將十次多項式 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)(x+8)(x+9)(x+10)$ 展開後得 $x^{10} + 55x^9 + a_8x^8 + a_7x^7 + \cdots + 10!$ ，若 $a_8 = 55M$ ， $a_7 = 55^2N$ ，其中 M, N 為正整數，求數對 $(M, N) =$ _____。
14. 空間中，四面體 A-BCD， $\overline{AB} = \overline{CD} = 6$ ， $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = 5$ ， $\overline{BD} = 7$ ，求四面體 A-BCD 的體積為_____。
15. 四邊形 ABCD， $\overline{AB} = 14$ 、 $\overline{BC} = 9$ 、 $\overline{CD} = 7$ 、 $\overline{DA} = 12$ ，求四邊形 ABCD 的所有內切圓中，面積最大者為_____。
16. 用 5 種不同顏色塗右圖的 10 個固定不動的圓形區域，且相鄰區域須塗不同色，則共有_____種塗法。

