解題 by 一心

1. 計算$\sum_{k=1}^{20} k^4$之值

$(k-1)^5 = k^5 - 5k^4 + 10k^3 - 10k^2 + 5k - 1$,移項得$k^5 - (k-1)^5 = 5k^4 - 10k^3 + 10k^2 - 5k + 1$

兩邊同取$\sum_{k=1}^{n}$,得$n^5 - 1 = 5\sum_{k=1}^{n} k^4 - 10\sum_{k=1}^{n} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n} k^2 - 5\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$

故$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}\left(n^5 + 10\sum_{k=1}^{n} k^3 - 10\sum_{k=1}^{n} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 - 1\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

故$\sum_{k=1}^{20} k^4 = \frac{20\cdot 21\cdot 41\cdot 1259}{30} = 722666$

2. 五組(X,Y)數據：(29,6)(39,41)(69,16)(109,36)(149,56)，求 X 與 Y 的相關係數

$r_{XY} = \frac{\sum (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{X})^2 \sum (y_i - \bar{Y})^2}}$,代入解出$r_{XY} = \frac{29}{40}$

3. 若 a 為實係數方程式 $x^2 - 3x + k = 0$的一個虛根，求$|a|$的最大下界

兩根為$a, \bar{a}$, $\quad a + \bar{a} = 3, a\bar{a} = k = |a|^2$

且$D < 0, (-3)^2 - 4k < 0, k > \frac{9}{4}$,即$|a|^2 > \frac{9}{4}, |a| > \frac{3}{2}$

4. 若 $x^2 - (k+3)x + (2k-1) = 0$的兩根均為整數，求所有可能 k 值之和

$D = (k+3)^2 - 4(2k-1) = k^2 - 2k + 13 = (k-1)^2 + 12 > 0$

$x = \frac{(k+3) \pm \sqrt{(k-1)^2 + 12}}{2} \in \mathrm{Z}, (k-1)^2 + 12 = h^2$,其中$h \in \mathrm{N}$

$(k-1-h)(k-1+h) = -12$,解$(a+b)(a-b) = -12$之整數解

$(a,b) = (-2,4)(2,-4)$,故$k = -1, 3$

所有k可能值之和$= 3 + (-1) = 2$

5. 若 $x, y, z \in \mathbb{R}$ ，且 $x + y + z = 2$ ， $x^2 - yz = 4$ ，求 $xy + 3yz + zx$ 最大值

$xy + 3yz + zx = x(y+z) + 3(x^2 - 4) = x(2-x) + 3(x^2 - 4) = 2x^2 + 2x - 12$

$= 2(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{2}$

又y, z為方程式$t^2 - (2-x)t + (x^2 - 4) = 0$之兩根

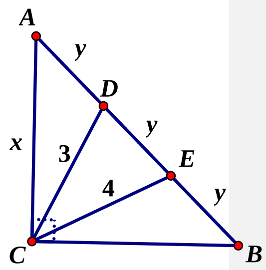
$D = (2-x)^2 - 4(x^2 - 4) = -3x^2 - 4x + 20 \geq 0, 3x^2 + 4x - 20 \leq 0$

$\frac{-10}{3} < x < 2$,最大值發生在$x = \frac{-10}{3}$

最大值$= \frac{32}{9}$

解題 by 一心

6. ΔABC ，$\angle C = 90^\circ$ ，$\overline{AB}$ 邊上三等分點 D,E，且 $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EB}$ ，已知 $\overline{CD} = 3$ ，$\overline{CE} = 4$ ，求 $\overline{AC}$



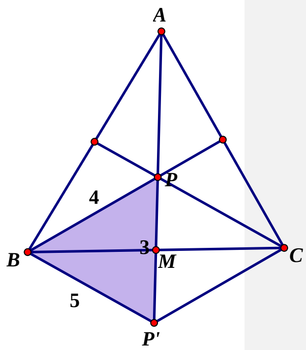
令 $\overline{AC} = x, \overline{AD} = y$

$\cos A = \dfrac{x^2 + y^2 - 9}{2xy} = \dfrac{x^2 + 4y^2 - 16}{2x(2y)}$, 得 $x^2 - 2y^2 = 2$

$\cos \angle CED = \dfrac{16 + y^2 - 9}{2 \cdot 4 \cdot y} = -\dfrac{16 + y^2 - (9y^2 - x^2)}{2 \cdot 4 \cdot y}$, 得 $x^2 - 7y^2 = -23$

故 $y^2 = 5, x^2 = 12, x = 2\sqrt{3}$

7. ΔABC，若 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ ，且 $\overline{PA} = 3$，$\overline{PB} = 4$，$\overline{PC} = 5$，求 ΔABC 面積



很明顯的 P 即是重心，作 P' 使 $\overline{PM} = \overline{MP'}$ ，每一小塊三角形面積相等，又 $\overline{AP} = \dfrac{2}{3}\overline{AM} = \dfrac{2}{3}(3\overline{PM}) = 2\overline{PM} = \overline{PP'}$

$\Delta ABC = 3\Delta BPP' = 3\sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 18$

8. 有一房間共有 5 門，甲乙丙丁 4 人，任兩人由不同的門進入，任兩人由不同的門出去，且每人不可從自己進入的門出去，則四人各進出一次共有幾種方法

進入方法 $P^5_4 = 120$

出去方法=甲乙丙丁錯排= $P^5_4 - C^4_1 P^4_3 + C^4_2 P^3_2 - C^4_3 P^2_1 + C^4_4 P^1_0 = 120 - 96 + 36 - 8 + 1 = 53$

故進出一次方法數為 $120 \cdot 53 = 6360$

9. 欲在 3 根相異的旗桿上，共掛上 5 面相異的旗子(需考慮旗子掛在旗桿上的上下關係)，問共有幾種掛法

分組討論(5,0,0),(4,1,0),(3,2,0),(3,1,1),(2,2,1)

$(5,0,0)\ C^3_1 5! = 360$

$(4,1,0)\ C^5_4 4! 3! = 720$

$(3,2,0)\ C^5_3 3! 2! 3! = 720$

$(3,1,1)\ C^5_3 C^2_1 3! \dfrac{3!}{2!} = 360$

$(2,2,1)\ C^5_2 C^3_2 2! 2! \dfrac{3!}{2!} = 360$

全部相加 $= 2520$

解題 by 一心

10. 在圓上任取 12 點，兩兩相連所得的直線，最多將此圓內區域分割為幾個區域

有 n 點，所求 $a_n = C_0^n + C_2^n + C_4^n$ (詳細證明請參考數學傳播『一組弦可將圓分成幾部份?』)

所求 $a_{12} = 1 + 66 + 495 = 562$

11. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 2$ ， $a_n = \dfrac{2a_{n-1}+1}{a_{n-1}+2}, \forall n \ge 2$ ，求一般項 a_n

設 $x = \dfrac{2x+1}{x+2}, x^2 = 1$, 得 $x = \pm 1$

則 $\dfrac{a_n+1}{a_n-1} = \dfrac{\dfrac{2a_{n-1}+1}{a_{n-1}+2}+1}{\dfrac{2a_{n-1}+1}{a_{n-1}+2}-1} = \dfrac{3a_{n-1}+3}{3a_{n-1}+3} = 3(\dfrac{a_{n-1}+1}{a_{n-1}-1}) = 3^2\dfrac{a_{n-2}+1}{a_{n-2}-1} = ... = 3^{n-1}(\dfrac{a_1+1}{a_1-1}) = 3^n$

故 $a_n = \dfrac{3^n+1}{3^n-1}$ (此方法可參閱數學傳播『遞歸數列與不動點』)

12. 若 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ ，當 $\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}} + \dfrac{2}{\sqrt{\cos x}}$ 有最小值時，求此時 $\log_2(\tan x)$

由廣義柯西不等式

$$\left((\sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt{\sin x}}})^5 + (\sqrt[5]{\frac{2}{\sqrt{\cos x}}})^5 \right)^4 \left((\sqrt[5]{\sin^2 x})^5 + (\sqrt[5]{\cos^2 x})^5 \right) \ge (1+2^4)^5 = 17^5$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \frac{2}{\sqrt{\cos x}} \right)^4 \ge 17^5, \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \frac{2}{\sqrt{\cos x}} \ge 17^{\frac{5}{4}}, \text{此時} \frac{\sqrt[5]{\sin^2 x}}{\sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt{\sin x}}}} = \frac{\sqrt[5]{\cos^2 x}}{\sqrt[5]{\frac{2}{\sqrt{\cos x}}}}$$

$$\sin^{\frac{5}{2}} x = \frac{1}{2}\cos^{\frac{5}{2}} x, \text{得} \tan^{\frac{5}{2}} x = 2^{-1}, \tan x = 2^{-\frac{2}{5}}$$

$$\log_2(\tan x) = -\frac{2}{5}$$

13. 魯夫航行於 A,B,C,D,E 五座島嶼之間，每一清晨魯夫隨機前往任一其他島嶼並留宿該島的機率均為 0.25，若第一天清晨魯夫從 A 島出發，設第 n 天魯夫留宿於 A 島之機率為 P_n ，則 $\left| P_n - \dfrac{1}{5} \right| \le 10^{-9}$ 之最小 n 值

解題 by 一心

$P_n=\frac{1}{4}(1-P_{n-1})$

$P_n-\frac{1}{5}=-\frac{1}{4}(P_{n-1}-\frac{1}{5})=(-\frac{1}{4})^2(P_{n-2}-\frac{1}{5})=...=(-\frac{1}{4})^{n-1}(P_1-\frac{1}{5})=(-\frac{1}{4})^{n-1}(-\frac{1}{5})$

$\left|P_n-\frac{1}{5}\right|=(\frac{1}{4})^{n-1}\frac{1}{5}\le 10^{-9}$

$(n-1)(-2\log 2)-\log 5\le -9$

$n-1\ge 13.8$

得n最小值為15

14. 若將 n 顆球全部投入 5 個箱中，每球投入每箱的機率均為 0.2，若已知空箱數的期望值小於 0.1，求 n 最小值

4 空箱的機率 $p_4=C_1^5(\frac{1}{5})^n$

3 空箱的機率 $p_3=C_2^5\left((\frac{2}{5})^n-C_1^2(\frac{1}{5})^n\right)$

2 空箱的機率 $p_2=C_3^5\left((\frac{3}{5})^n-C_2^3(\frac{2}{5})^n+C_1^3(\frac{1}{5})^n\right)$

1 空箱的機率 $p_1=C_4^5\left((\frac{4}{5})^n-C_3^4(\frac{3}{5})^n+C_2^4(\frac{2}{5})^n-C_1^4(\frac{1}{5})^n\right)$

空箱期望值=$\sum_{k=1}^{4}kp_k=5(\frac{4}{5})^n<0.1$，取對數$\log 5+n(\log 4-\log 5)<-1$

$n>17.5$，n 最小 18

15. 正整數 a,b,c 滿足 abc=420，考慮集合 S={a,b,c}，問集合 S 的所有可能有幾種

$420=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$，$a=2^{x_1}3^{x_2}5^{x_3}7^{x_4},b=2^{y_1}3^{y_2}5^{y_3}7^{y_4},c=2^{z_1}3^{z_2}5^{z_3}7^{z_4}$

$\begin{cases}x_1+y_1+z_1=2\\x_2+y_2+z_2=1\\x_3+y_3+z_3=1\\x_4+y_4+z_4=1\end{cases}$，所有可能為$H_2^3H_1^3H_1^3H_1^3=162$

不考慮 a,b,c 排列，除了(420,1,1) (2,2,105)，其餘 a,b,c 皆相異

故所求=$\frac{162-6}{3!}+2=28$

16. 擲一公正六面骰子 n 次(各面為 1,2,3,4,5,6 點)，依序紀錄點數為 $x_1,x_2,x_3,...,x_n$，設滿足 $(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_4)...(x_{n-1}-x_n)(x_n-x_1)\ne 0$ 之機率為 P_n，求 P_n+6P_{n+1}之值

相當於一圓 n 等分塗色，相鄰不能同色，方法數$6\cdot 5^{n-1}=a_n+a_{n-1}$

推得$(\frac{5}{6})^{n-1}=P_n+\frac{P_{n-1}}{6}$，故$P_n+6P_{n+1}=\frac{5^n}{6^{n-1}}$

解題 by 一心

17. 某種擲骰遊戲，花費一籌碼可擲兩顆公正骰子(各面為 1,2,3,4,5,6 點)一次
若擲出點數和為 7，可得 100 元與一枚籌碼
若擲出點數和為 12，可得 240 元與兩枚籌碼
擲出其他情況則得 0 元與 0 枚籌碼。
現有 10 枚籌碼，玩遊戲直到籌碼用盡，求所得獎金的期望值

1 枚籌碼的期望值 $E=\frac{1}{6}(100+E)+\frac{1}{36}(240+2E)$

得 $E=30$，10 枚的期望值 $=10E=300$

18. 考慮正整數 n 的所有正整數分割，將其分割乘積的最大值定為 $f(n)$，則 $f(2012)$為幾位數
$n=a_1+a_2+...+a_k, a_i\le a_{i+1}$，若 $a_1=1$，$P_n=a_1a_2a_3...a_k=a_2a_3...a_k$
可重新分割 n 使得 $n=(1+a_2)+a_3+...+a_k$，$P'_n=(1+a_2)a_3a_4...a_k>P_n$
故 $a_1\ge 2$

當 n 是奇數，令 $n=\frac{n+1}{2}+\frac{n-1}{2}$，

$\frac{n+1}{2}\frac{n-1}{2}-n=\frac{1}{4}(n^2-4n-1)=\frac{1}{4}(n^2-4n-5)+1=\frac{1}{4}(n-5)(n+1)+1,$ 當 $n\ge 5$，再作分割可使乘積更大

當 n 是偶數，令 $n=\frac{n}{2}+\frac{n}{2}$

$\frac{n}{2}\frac{n}{2}-n=\frac{1}{4}(n^2-4n)=\frac{1}{4}n(n-4),$ 當 $n\ge 4$，再作分割可使乘積更大

故大於 4 的數都可以再作分割使乘積更大
又 4=2+2=2*2，故分割的情形剩下 2 與 3
若 2 有 3 個以上，$6=2+2+2=3+3, 2^3<3^2$，故要使乘積最大 2 最多只能有兩個
$f(2012)=3^{670}\cdot 2^2$，$\log f(2012)=319.$多，故 $f(2012)$ 為 320 位數

19. 從$\{0,1,2,3,4,5,6\}$選出五個數字(可重複)所排列形成的五位正整數中，12 的倍數有幾個
4 的倍數：末兩位為$\{00,04,12,16,20,24,32,36,40,44,52,56,60,64\}$

其中分成三組 $\begin{cases} 3k: 00,12,24,36,60 \\ 3k+1: 04,16,40,52,64 \\ 3k+2: 20,32,44,56 \end{cases}$

前三位除以 3 的餘數，可考慮生成函數 $\underbrace{(2+2x+2x^2)}_{\text{第一位}}\underbrace{(3+2x+2x^2)}_{\text{第二位}}\underbrace{(3+2x+2x^2)}_{\text{第三位}}$

0、3、6 次之係數和為 98
1、4 次之係數和為 98
2、5 次之係數和為 98
故共有 $98(5+5+4)=1372$

註解 [C1]: 首位不為 0

解題 by 一心

20. 實係數方程式 $f(x)$，若 $deg\ f(x)$=2010，且 $f(k)=\dfrac{2k+1}{k}, \forall k=1,2,3,....,2011$，求 $\sum_{k=0}^{2011}\left\{C_k^{2012}(-1)^k f(k+1)\right\}$ 之值

$$f(k)=2+\frac{1}{k}\ \forall k=1,2,3,...,2011$$

$$Let\ g(x)=xf(x), \deg g(x)=2011, 且 g(x)=2x+1\ \forall k=1,2,3,...,2011$$

$$Let\ g(x)=a(x-1)(x-2)...(x-2011)+2x+1$$

$$-2011!a+1=0, a=\frac{1}{2011!}, g(2012)=4026$$

$$\sum_{k=0}^{2011}\left\{C_k^{2012}(-1)^k f(k+1)\right\}=\sum_{k=0}^{2010}\left\{C_k^{2012}(-1)^k f(x+1)\right\}+C_{2011}^{2012}(-1)^{2011}\frac{g(2012)}{2012}$$

$$=2\sum_{k=0}^{2010}C_k^{2012}(-1)^k+\sum_{k=0}^{2010}(-1)^k\frac{2012!}{k!(2012-k)!}\frac{1}{k+1}-g(2012)$$

$$=2\left(C_{2011}^{2012}-C_{2012}^{2012}\right)+\frac{1}{2013}\sum_{k=1}^{2011}(-1)^{k+1}C_k^{2013}-4026$$

$$=4022+\frac{1}{2013}(2013)-4026$$

$$=-3$$

21. 空間中兩條直線 $L_1:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-2}{2}$，$L_2:\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z-2}{-1}$，用不同方法求出 $d(L_1,L_2)$

(1)參數式

(2)平面法

(3)投影法