國立臺中第一高級中學101學年度第1次教師甄選 數學科 試題卷

壹、填充題：10題，每題3分，共30分。答案請化至最簡，否則不計分。

1. 計算 $\sum_{k=1}^{20} k^4$ 之值。

2. 五組(X,Y)數據： $(29,6),(39,41),(69,16),(109,36),(149,56)$ ，求X與Y的相關係數。

3. 若a爲實係數方程式 $x^2-3x+k=0$ 的一個虛根，求 $|a|$ 的最大下界。

4. 若 $x^2-(k+3)x+(2k-1)=0$ 的二根均爲整數，求所有可能k值之和。

5. 若 $x,y,z\in\mathbb{R}$ ，且 $x+y+z=2$ ， $x^2-yz=4$ ，求 $xy+3yz+zx$ 的最大值。

6. ΔABC ， $\angle C=90^0$ ， $\overline{AB}$ 邊上的三等分點D, E，且 $\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EB}$ ，
已知 $\overline{CD}=3$ ， $\overline{CE}=4$ ，求 $\overline{AC}$ 。

7. $\triangle ABC$，若$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，且 $\overline{PA}=3,\overline{PB}=4,\overline{PC}=5$ ，求$\triangle ABC$的面積。

8. 有一房間共有5個門，甲乙丙丁4人，任二人由不同門進入，任二人由不同門出去，
且每人不可從自己進入的門出去，則四人各進出一次共有幾種方法？

9. 欲在3根相異的旗桿上，共掛上5面相異的旗子(需考慮旗子掛在旗桿的上下關係)，
問共有幾種掛法。

10. 在圓上任取12個點，兩兩相連所得的直線，最多將此圓內區域分割成爲幾個區域。

貳、填充題：10題，每題5分，共50分。答案請化至最簡，否則不計分。

11. 設數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=2$ 且 $a_n=\dfrac{2a_{n-1}+1}{a_{n-1}+2},\forall n\geq 2$ ，求一般項 a_n (以n表之)。

12. 若 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ ，當 $\dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}+\dfrac{2}{\sqrt{\cos x}}$ 有最小值時，求此時 $\log_2(\tan x)$ 值。

13. <u>魯夫</u>航行於A、B、C、D、E五座島嶼之間。
每日清晨<u>魯夫</u>隨機前往任一其他島嶼並留宿該島的機率均爲0.25。
若第一天清晨<u>魯夫</u>從A島出發，設第 n 天晚上<u>魯夫</u>留宿於A島的機率爲 P_n 。
求滿足 $\left|P_n-\dfrac{1}{5}\right|\leq 10^{-9}$ 之最小n值。

試題未完，請翻下頁！

14. 將 n 顆球，全部投入 5 個箱中，每球投入每箱的機率均爲 0.2。
若已知空箱數期望值小於 0.1，求 n 最小值。

15. 正整數a,b,c滿足 $a\cdot b\cdot c=420$ ，考慮集合 $S=\{a,b,c\}$ ，問集合 S 的所有可能有幾種。

16. 投擲一顆公正六面骰子 n 次(各面爲1,2,3,4,5,6點)，依序紀錄點數爲 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ ，
設滿足 $(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_4)\cdots(x_{n-1}-x_n)(x_n-x_1)\neq 0$ 的機率爲 P_n 。
求 $P_n+6\cdot P_{n+1}$ 之值(以 n 表之)。

17. 某種擲骰遊戲，花費 1 個籌碼可以投擲二粒公正骰子(各面爲1,2,3,4,5,6點)一次。
若擲出之點數和爲 7 點時，可得獎金 100 元與 1 個籌碼；
若擲出之點數和爲 12 點時，可得獎金 240 元與 2 個籌碼。
若擲出之點數和爲其他點數時，得 0 元與 0 個籌碼。
現嗚人有 10 個籌碼，開始玩此遊戲直到用完所有籌碼爲止，
求嗚人最後能獲得的獎金期望值。

18. 考慮正整數 n 的所有正整數分割，將其分割乘積的最大值定義爲 $f(n)$ ，
[例：1+1+1+1=2+1+1=3+1=2+2=4， $(1\times1\times1\times1)<(2\times1\times1)<(3\times1)<(2\times2)=(4)$ ，得 $f(4)=4$]。
問 $f(2012)$ (以十進位表示)是幾位數。

19. 從{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} 選出五個數字(可重複)所排列成的五位正整數之中，有幾個爲12的倍數。

20. 實係數多項式 $f(x)$ ，若 $\deg f(x)=2010$ ，且 $f(k)=\dfrac{2k+1}{k},\forall k=1,2,3,\cdots,2011$ ，
求 $\displaystyle\sum_{k=0}^{2011}\{C_k^{2012}\cdot(-1)^k\cdot f(k+1)\}$ 值。

參、計算題：共 20 分。

21. 空間中二條直線 $L_1:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-2}{2}$ 與 $L_2:\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z-2}{-1}$ 。
試用各種不同的方式，求出 L_1 與 L_2 的距離。
說明：每種不同的方法得 4 分，超過 20 分以 20 分計算。

參考答案：
[722666]。[$\frac{29}{40}$]。[$\frac{3}{2}$]。[2]。[$\frac{32}{9}$]。[$2\sqrt{3}$]。[18]。[6360]。[2520]。[562]。
[$\frac{3^n+1}{3^n-1}$]。[$\frac{-2}{5}$]。[15]。[18]。[28]。[$\frac{5^n}{6^{n-1}}$]。[300]。[320]。[1372]。[-3]。
[$\sqrt{42}$]。

試題結束！