國立玉井高級工商職業學校 98 學年度第一次教師甄選數學試題

一、填充題(每格 4 分)

1. 設 a,b 為自然數，且 $a>b$，若已知 a 除以 b 餘 24，b 除以 72 餘 40，則 a 與 b 最大公因數為？

2.若矩陣 $\begin{bmatrix} \sin\frac{\pi}{3} & -\cos\frac{\pi}{3} \\ \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的最小自然數 $n=$？

3. $\sqrt{\log_3\sqrt{6}+\sqrt{\log_3 2}}+\sqrt{\log_3\sqrt{6}-\sqrt{\log_3 2}}=$? .

4. 已知橢圓 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ 有一弦以 $(2,1)$ 為中點，含此弦的直線方程式為？ .

5. 有一四面體 $ABCD$ ，$\overline{AB}=6,\overline{CD}=8,\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=7$ ，求 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的距離？。

6. 設 $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$ ，求 $f(f(x))$ 除以 $f(x)$ 的餘式為？

7. 有一顆半徑為 12 公分的球形西瓜浸漬水裡，西瓜浮出水面 4 公分，求西瓜在水面下之部分的體積為__________立方公分 .

8. ΔABC 中，若 $4\sin A+3\cos B=6$ ，$3\sin B+4\cos A=1$ ，則 $\angle C=$？

9. P 為曲線 $y=x^2+2$ 上之動點，A 為直線 y=x 上之動點，且 F(2,3)求 $\overline{FA}+\overline{AP}$ 之最小值。

10. 在平面上，當(x,y)滿足$|x|+|y|\leq 1$，x^2+y^2-x+2y的最小值為？。

11. $a_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)}$，則$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=$？。

12. 設 $x,y\in R$ ，若 $x^2+(y-1)^2\leq 1$ ，求 $\frac{x+y+1}{x-y+3}$ 之最大值為？

13. 設有甲、乙、丙三個箱子，甲箱有2個白球與4個紅球，乙箱有4個白球與8個紅球，丙箱有1個白球與3個紅球，如果從每箱各取一球，發現這三個球正好有兩個白球，問從甲箱取出的是白球的機率是多少？

14. 空間上，假設△PQR 為平面 $7x-6y+4z+2=0$ 上的一個三角形，且已知四平面 E_1：$3x-4y+5z=0$，E_2：$4x-5y+3z=0$，E_3：$4x-3y+5z=0$，E_4：$5x-3y+4z=0$。今以 m、M 分別表△PQR 在 E_1、E_2、E_3、E_4 四平面之正射影的面積中的最小與最大面積，則 m：M=______。

15. 以 O 爲原點之坐標平面，若 $\overrightarrow{OP}=(3\sin\alpha+\cos\beta,\sin\alpha+3\cos\beta)$，$0\le\alpha\le\frac{\pi}{6}$，

$0\le\beta\le\frac{\pi}{3}$，則 $\overrightarrow{OP}$ 之一切 P 點所成區域的面積？．

16. 若 a、a、b、b、c、c 六個字母依直線任意排列，試問同字母均不相鄰的機率爲？。

17 $x\in R$，$f(x)=\dfrac{2ax+b}{x^2+1}$，若 $f(x)$之最大值爲 4，最小值爲 -1，則 $(a^2,b)=$______。

18. $A(\alpha),B(\beta),C(\gamma)$ 爲複數平面上三相異點，滿足 $|\alpha-\beta|=2$，且

$\alpha-2\beta+\gamma=\sqrt{3}i(\beta-\gamma)$，求 $\overline{AC}=$？

19.. 下表是 6 名相同類組的學生「在校模擬考」與「升學指定考」的成績:

學生編號	1	2	3	4	5	6
模擬考(x)	70	72	77	60	59	70
指定考(y)	80	68	84	72	68	66

(1)求此 6 名學生模擬考成績與指定考成績的相關係數爲？．(四捨五入至小數點後兩位)

(2)求此 6 名學生指定考成績對模擬考成績的最適合直線爲？．(若以小數作答，請四捨五入至小數點後兩位)

二、計算證明題(每題 10 分)

1. 設 n 爲自然數，試證：$5^n\ge1+4n\sqrt{5^{n-1}}$

2. 設 $a>0$，$A(a,a^2)$ 爲拋物線 $y=x^2$ 上一點，直線 M 爲過 A 點的切線，將直線 M 以 A 點爲中心順時鐘方向旋轉 30°，得直線 L，且直線 L 交拋物線拋物線於 A,B 兩點，又 $C(a,0)$，$O(0,0)$。

求(1)以 a 來表示直線 L 之方程式。(4 分)

(2)若 $\overline{OC}$，$\overline{CA}$ 與拋物線 $y=x^2$ 所圍成區域的面積爲 $S(a)$，$\overline{AB}$ 與拋物線 $y=x^2$ 所圍成區域的面積爲 $T(a)$，則 $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{T(a)}{S(a)}=$？(6 分)

國立玉井高級工商職業學校 98 學年度第一次教師甄選數學答案卷

一、填充題(每格 4 分)

1	2	3	4	5
8	12	$\sqrt{2}$	$x+2y-4=0$	$2\sqrt{6}$
6	7	8	9	10
120	$\frac{6400\pi}{3}$	30°	$\sqrt{5}$	$-\frac{9}{8}$
11	12	13	14	15
$\frac{1}{2}$	$2+\sqrt{3}$	$\frac{5}{7}$	$13:14$	2
16	17	18	19(1)	19(2)
$\frac{1}{3}$	$(4,3)$	$\sqrt{7}$	0.51	$y=73+0.53(x-68)$

二、計算證明題(每題 10 分)

1	2