

國中數學科試題

選擇題（每題 2 分，共 100 分）

- 考慮方程式 $6x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ 之根，下述何者正確？
 - 沒有實根
 - 恰有一實根
 - 恰有二實根
 - 恰有四實根
- 在坐標平面上，如果把 $f(x) = x^2$ 的圖形，先水平往左邊平移 3 個單位，再鉛直往上平移 1 個單位，則可得下列哪一個函數之圖形？
 - $g(x) = -3x^2 + 1$
 - $g(x) = x^2 - 3x + 1$
 - $g(x) = x^2 - 6x + 10$
 - $g(x) = x^2 + 6x + 10$
- 在坐標平面上，若以 y 軸為對稱軸，作 $y = \sqrt{x}$ 的圖形之對稱圖形，則此對稱圖形為下列何者之圖形？
 - $y = -\sqrt{x}$
 - $y = \sqrt{-x}$
 - $y = -\sqrt{-x}$
 - $y^2 = -x$
- 若直線 L 的方程式為 $(k-2)y = (3k-1)x - 1$ ，則不論 k 為何值，直線 L 恆通過哪一象限？
 - 第一象限
 - 第二象限
 - 第三象限
 - 第四象限
- 對於任意實數 x ，若 $ax^2 + 2a(1-a)x + 4a < 0$ 恆成立，則實數 a 的範圍為何？
 - $-1 < a < 0$
 - $-1 < a < 3$
 - $a < -1$
 - $a > 3$
- 若滿足 $\log_{10} x + \log_{10} y = \log_{10}(x - y + 15)$ 的整數解 (x, y) 共有 k 組，則 $k = ?$
 - 4
 - 3
 - 2
 - 1
- 設二直線 $2x - y = 11$ 及 $y - x = 13$ 的交點為 P ，令 Q 表示圓 $x^2 + y^2 - 10y = 0$ 上離 P 最近的點，若 Q 的坐標為 (a, b) ，則下列何者正確？
 - a, b 均為奇數
 - a, b 均為偶數
 - a 是奇數， b 是偶數
 - a 是偶數， b 是奇數
- 將 5 個數字 1, 2, 3, 4, 5 全取排成一列作成一個五位數，試求此五位數大於 45000 的機率為何？
 - $\frac{2}{7}$
 - $\frac{1}{6}$
 - $\frac{1}{5}$
 - $\frac{1}{4}$
- 試求極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5^x - 3^x}{x} \right) = ?$
 - 1
 - 2
 - $\ln 5 - \ln 3$
 - 不存在
- 給定函數 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$ ，試求其圖形的反曲點(points of inflection)發生在何處？
 - 當 $x = 0$ 時
 - 當 $x = 1$ 或 $x = -1$ 時
 - 當 $x = 2$ 或 $x = -2$ 時
 - 以上皆非
- 平面上給定兩函數 $f(x) = x^3$ 與 $g(x) = x^{1/3}$ ，試求其圖形所圍成的區域之面積為多少平方單位？
 - 1
 - 1.5
 - 2
 - 3
- 設 R 表示由 $y = x - x^2$ 與 $y = 0$ 在第一象限所圍成的區域，今若 R 繞著鉛直線 $x = 2$ 旋轉一圈，求旋轉體(solid of revolution)之體積為多少立方單位？
 - $\frac{\pi}{4}$
 - $\frac{\pi}{2}$
 - π
 - 2π
- 判斷下列各積分何者收斂(converges)?
 - $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
 - $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$
 - $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$
 - $\int_0^{\infty} \sin x dx$
- 曲線 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \\ z = t \end{cases}$ 在 $t = 0$ 與 $t = \pi$ 間之弧長(arc length)為何？
 - $2\sqrt{2}\pi$ 單位
 - 2π 單位
 - $\sqrt{2}\pi$ 單位
 - π 單位
- 若 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 均為空間向量，則 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ 與下列何者相等？
 - $\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$
 - $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$
 - $\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$
 - $(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a}$
- 求空間中兩平行直線 $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{6}$ 與 $\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ 間之距離為何？
 - $2\sqrt{5}$
 - $\sqrt{5}$
 - $5\sqrt{2}$
 - $3\sqrt{2}$
- 有甲、乙、丙、丁四個條件：(甲) a 為正數 (乙) b 為正數 (丙) c 為正數 (丁) d 為正數。已知 $a > b, c > d$ ，請問還要甲、乙、丙、丁中的哪些條件成立，才能得到 $ac > bd$ ？
 - 只要條件乙成立即可
 - 只要條件丙成立即可
 - 乙、丙兩條件中只有一個成立，都不足以得到 $ac > bd$ 的結論，需要乙和丙同時成立
 - 必須四個條件同時成立，否則不足以得到 $ac > bd$ 的結論
- 以 $x^2 + 2x + 3$ 除 $(x^2 + 3x + 4)^3$ 所得餘式為下列何者？
 - $x + 1$
 - $2x + 2$
 - $-2x - 2$
 - 4

19. 某場選舉中，已知沒有廢票，且有效票為 800000 張，若候選人 A 的得票率為 4 成，則從有效票中抽樣 600 張，恰有 200 張是投票給 A 的機率為何？

- ① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{C_{200}^{320000} \times C_{400}^{480000}}{C_{600}^{800000}}$ ③ $C_{200}^{600} \times (\frac{1}{4})^{200} \times (\frac{3}{4})^{400}$ ④ $\frac{C_{200}^{400000} \times C_{400}^{400000}}{C_{600}^{800000}}$

20. 設 $Z = \begin{bmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{bmatrix}$ ，則 $Z + Z^2 + Z^3 + \dots + Z^{100} =$

- ① $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

21. 已知 $P(1, 3, 4)$ 是空間中的一點，請問下列敘述何者正確？

- ① P 點到 y 軸的距離為 3 ② P 點關於 yz 平面的對稱點是 $(1, -3, -4)$ ③ P 點在 y 軸的投影點是 $(-1, 3, -4)$
④ P 點關於原點的對稱點是 $(-1, -3, -4)$

22. 下列選項何者的值最大？

- ① $\sin 20^\circ \cos 20^\circ$ ② $\sin 50^\circ \cos 50^\circ$ ③ $\sin 65^\circ \cos 65^\circ$ ④ $\sin 80^\circ \cos 80^\circ$

23. 若圖形 A 先經過 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 變換，再經過 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 之變換而得到圖形 B ，則下列哪一個二階方陣可使 B 變換為 A ？

- ① $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ ② $\frac{-1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ ③ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ④ $\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

24. 三條射線 \overrightarrow{OX} ， \overrightarrow{OY} ， \overrightarrow{OZ} 兩兩互相垂直，且交於原點 O ，若 A, B, C 三點分別在 \overrightarrow{OX} ， \overrightarrow{OY} ， \overrightarrow{OZ} 上，且 $\overline{OA} = 2$ ， $\overline{OB} = 1$ ， $\overline{OC} = 3$ 。設 P 表示為通過 A, B, C 三點之平面，則原點到平面 P 的距離為何？

- ① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{5}{7}$ ③ $\frac{6}{7}$ ④ 1

25. 下列敘述何者正確？

- ① 設 $\langle a_n \rangle$ 為無窮數列，並且對每一個自然數 n 都有 $a_{n+1} \geq a_n \geq 0$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
② 設 $\langle a_n \rangle$ ， $\langle b_n \rangle$ 為兩無窮數列，若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$
③ 設 $\langle a_n \rangle$ ， $\langle b_n \rangle$ 為兩收斂數列，且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ ，若對每一個自然數 n 都有 $a_n < b_n$ ，則 $\alpha < \beta$
④ 設 $\langle a_n \rangle$ 為一數列，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ 的充要條件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

26. 已知二次方程式 $x^2 + 5x - ax + a^2 - 7a - 14 = 0$ 有兩實根 α, β ，求 $\alpha\beta - \alpha - \beta + 1$ 之最大值為何？

- ① -24 ② 1 ③ 25 ④ 30

27. 下列各式何者錯誤？

- ① $\sqrt{\frac{-2}{-3}} = \frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-3}}$ ② $\sqrt{-2} \times \sqrt{-3} = \sqrt{(-2) \times (-3)}$
③ $\sqrt{2} \times \sqrt{-3} = \sqrt{2 \times (-3)}$ ④ $\sqrt{\frac{-2}{3}} = \frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{3}}$

28. 設 A, B, C 為三事件，請問下列敘述何者正確？

- ① 若 A 與 B 為互斥事件時，則 A 與 B 為獨立事件
② 若 A, B, C 中兩兩為獨立事件，則 A, B, C 三事件獨立
③ 若 A, B, C 三事件為獨立事件，則 A', B', C' 三事件為獨立事件 (A' 為 A 的補集)
④ 若 $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$ ，則 A, B, C 三事件獨立

29. 若 $\sin^2 x < \cos^2 x$ ， $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ ，則下列何者為其解集合？

- ① $\{x | \frac{\pi}{2} < x < \pi, x \in R\}$ ② $\{x | 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, x \in R\}$ ③ $\{x | 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, x \in R\}$ ④ $\{x | 0 \leq x < \frac{\pi}{4}, x \in R\}$ 。

30. 下列敘述何者正確？

- ① 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
② 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 與 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 均不存在，則 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$ 也不存在
③ 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$ 為一定數，且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ， $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$
④ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{|x|}$ 存在

31. 下列敘述何者錯誤？

- ① 設 $a > 0$ ， n 為一正整數，則 $x^n = a$ 恰有一個正實根
② 每一個實係數 n ($n \geq 1$) 次方程式至少有一個複數根
③ 設 $f(x) = 0$ 為一實係數方程式，若 $a + b\sqrt{c}$ 為其一根，則 $a - b\sqrt{c}$ 也為其一根，其中 a, b, c 均為有理數
④ 若 $f(x)$ 為一實係數 n 次多項式且 z 為一複數，則 $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ 。

32. 下列各條件中，何者可決定唯一的圓？

- ① 通過點 $(-1, 0)$ ， $(3, 2)$ ② 通過三點 $(1, 1)$ ， $(2, 3)$ ， $(-1, -3)$
③ 通過 $(1, 2)$ 且與 x 軸、 y 軸均相切 ④ 通過四點 $(\sqrt{2}, 0)$ ， $(1, 1)$ ， $(0, -\sqrt{2})$ ， $(-1, 1)$

33. 已知甲說實話的機率為 $\frac{7}{10}$ ，乙說實話的機率為 $\frac{9}{10}$ ，今有一袋內裝著3個白球，7個黑球，自袋中任取一球，甲乙均說是白球，則此球確為白球之機率為多少？
- ① $\frac{189}{1000}$ ② $\frac{210}{1000}$ ③ $\frac{9}{10}$ ④ $\frac{7}{10}$
34. 若 x 為實數，則函數 $y = f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}\cos x$ 的最大值為何？
- ① $\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ 2
35. 設 n 為正整數，則滿足 $\frac{n+17}{n-7}$ 為整數的所有可能 n 值的個數為何？
- ① 8 ② 11 ③ 13 ④ 16
36. 已知 $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ ，則 $z_1^{2011} + z_2^{2011} = ?$
- ① -1 ② -i ③ 1 ④ i
37. 已知圓 $C: x^2 + y^2 + 4x - 6y + 11 = 0$ 與直線 $L: x + y - 2 = 0$ 交於 A, B 兩點，則 $\overline{AB} = ?$
- ① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$
38. 已知一個二位數正好是它的數字和的 n 倍（ $n > 1$ 為正整數），那麼將此二位數的十位數字與個位數字互換後所成的新的二位數正好是其數字和的幾倍？
- ① $11-n$ ② $10-n$ ③ $9-n$ ④ $n+1$
39. 已知 $\alpha = 20^\circ, \beta = 25^\circ$ ，則 $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta)$ 之值為何？
- ① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $1 + \sqrt{2}$ ④ $2(\tan \alpha + \tan \beta)$
40. 下列無窮級數中，何者是收斂級數？
- ① $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{2})^n$ ② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n!+1}$ ③ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$
41. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{\sqrt{9^n + 2^n}} = ?$
- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 不存在
42. $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A = 30^\circ, \angle B = 45^\circ$ ，且 $\overline{BC} = 24$ ，則 $\overline{AB} = ?$
- ① $24\sqrt{2}$ ② $12(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ ③ $24(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ ④ $24(\sqrt{2} + \sqrt{6})$
43. $\triangle ABC$ 中，若 $\angle C = 30^\circ, \overline{AC} = 2 + 2\sqrt{3}, \overline{BC} = 4$ ，則 $\angle B$ 的度數為幾度？
- ① 60° ② 75° ③ 105° ④ 120°
44. 設 n 為正整數，如果 $5n+16$ 與 $8n+29$ 有比1大的公因數，則此公因數為下列何者？
- ① 13 ② 17 ③ 23 ④ 29
45. 已知一數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1 = 1, a_2 = 3$ ，且 $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}, n \geq 2$ ，則此數列自第1項至第2011項的和為多少？
- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 5
46. 計算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_1^x \sqrt{1+e^{-t}} dt}{x} = ?$
- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 不存在
47. 已知一函數 f 的定義域為所有正整數，若 $f(1) = 2011$ ，且對任意正整數 $n > 1$ ，滿足條件 $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 f(n)$ ，則 $f(2011) = ?$
- ① $\frac{1}{2012}$ ② $\frac{1}{2011}$ ③ $\frac{1}{1006}$ ④ 1
48. 直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ，點 D 為 \overline{AB} 的中點，且過 D 作 \overline{AB} 的中垂線 \overline{DE} 交 \overline{AC} 於 E 點，若 $\overline{AB} = 2a, \overline{BC} = 1$ ，則 $\overline{DE} = ?$
- ① $a\sqrt{4a^2-1}$ ② $\frac{a}{\sqrt{2a^2-1}}$ ③ $\frac{a}{\sqrt{4a^2+1}}$ ④ $\frac{a}{\sqrt{4a^2-1}}$
49. 已知一連續實值函數 $f(x)$ 滿足條件：對所有實數 x ， $f(2x) = 3f(x)$ ，若 $\int_0^1 f(x) dx = 1$ ，則 $\int_1^2 f(x) dx = ?$
- ① 6 ② 5 ③ 4 ④ 3
50. 已知 $\triangle ABC$ 的外接圓之面積為 4π ，且 a, b, c 分別為 $\triangle ABC$ 的三個頂點 A, B, C 所對應的邊長。如果 $a^2 + b^2 = c^2$ ，且 $\sin A$ 與 $\sin B$ 正好是一元二次方程式 $(m+5)x^2 - (2m-5)x + 12 = 0$ 的兩個實根(其中 $m > 0$)，則 $a+b$ 的值為何？
- ① 5 ② $\frac{28}{5}$ ③ 6 ④ $\frac{48}{5}$