113 嘉科實中（高中）

一、填充題（每題 7 分， 共 56 分）

1. $\sum_{k=1}^{555}(k^k)$的個位數字為 6。

1
$555=10\times55+5$

56 組
1: $1\times56 \to 6$
2: $4+6+\cdots \to 0$ (2, 4, 8, 6)
3: $7+3+\cdots \to 0$ (3, 9, 7, 1)
4: $6+6+\cdots \to 6$
5: $5\times56 \to 0$

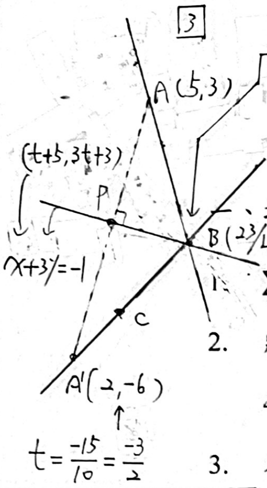
55 組
7: $3+7+\cdots \to 3$ (7, 9, 3, 1)
8: $6+4+\cdots \to 6$ (8, 4, 2, 6)
9: $9+9+\cdots \to 5$ (9, 1)
10 $\to 0$

$6\times3+3+5\equiv6 \pmod{10}$

2. 將2,3,3,5,5,5排成六位數，共有60種不同的排法，則這60個數的平均數為 425925.5。

2
$\left(2\times\frac{5!}{3!2!}+3\times\frac{5!}{3!}+5\times\frac{5!}{2!2!}\right)\times(1+10+100+\cdots+100000)/60=\frac{230\times111111}{60}$
$=425925.5$

3. 在坐標平面上有一△ABC，設 $A(5,3)$、L_1：$x+3y=-1$ 為∠B 的角平分線、L_2：$x-7y=23$ 是 C 點對直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 所作的垂直直線，若直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的方程式為 $ax+by=1$，則數對$(a,b)=(\frac{1}{8},-\frac{1}{8})$。

3


$t=\frac{-15}{10}=\frac{-3}{2}$

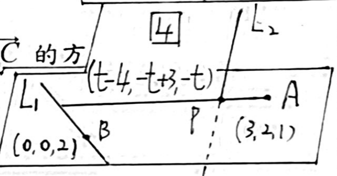
$\begin{cases}7x+y=38 & (\overleftrightarrow{AB})\\ x+3y=-1\end{cases} \Rightarrow 20y=-45$

$(\overleftrightarrow{BC}) \Rightarrow m_{BC}=\frac{15}{15}=1$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BC}: x-y=8$

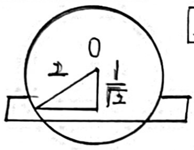
4. 電影星際大戰(Star Wars)中，帝國軍的兩架鈦戰機在空間坐標系中，各自沿直線 L_1：$\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=z-2$、$L_2$：$x+4=3-y=-z$ 飛行，反抗軍在點(3, 2, 1)處發射一束雷射砲恰好擊落了此兩架鈦戰機，假設雷射砲的彈道為直線 L：$\frac{x-3}{a}=\frac{y-2}{b}=z-1$，試問數對$(a,b)=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$。

4
$\overrightarrow{AB}$ 3 2 -1 3 2 -1
$\vec{v_1}$ 2 2 1 2 2 1
-4 5 2



$E: 4x-5y+2z=4$
$4(t-4)-5(-t+3)-2t=4$
$\Rightarrow 7t=35 \Rightarrow t=5$
$P(1,-2,-5) \Rightarrow \overrightarrow{AP}=2(1,2,3)$

5. 空間中，平面$y-z=1$交球面$x^2+y^2+z^2=4$於一圓，則此圓投影在xy平面上的封閉圖形面積為$\frac{7\sqrt{2}\pi}{4}$。

5


$d(O,E)=\frac{1}{\sqrt2}$

$\cos\theta=\frac{(0,0,1)\cdot(0,1,-1)}{1\cdot\sqrt2}=\frac{1}{\sqrt2}$

$A\cos\theta=\frac{7}{2}\pi\cdot\frac{1}{\sqrt2}=\frac{7\sqrt2}{4}\pi$

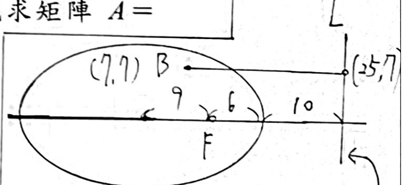
2024.8.8.(四)
羅伯咖啡
Ru

6. 設多項式函數$f(x)$滿足$deg(f(x))=2024$，且對於$k=1,2,3,\ldots,2025$，恆有$f(k)=\frac{2}{k}$，則$f(2026)$之值為$\frac{2}{1013}$。

6
令 $g(x)=xf(x)-2=A(x-1)\cdots(x-2025)$
$\deg(g(x))=2025$. $g(0)=A(-2025!)\Rightarrow A=\frac{2}{2025!}$

$f(x)=\frac{g(x)+2}{x}$
$f(2026)=\frac{2+2}{2026}=\frac{2}{1013}$

7. 在坐標平面上，若Γ：$\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{144}=1$、$A(9,0)$、$B(7,7)$，且動點 P 在 Γ 上，試求：$5\overline{PA}+3\overline{PB}$ 的最小值為 54。

7


$\overline{PF}=d(P,L)\cdot e \leftarrow \frac{c}{a}=\frac{3}{5}$
$\Rightarrow 5\overline{PF}=3\cdot d(P,L) \Rightarrow L: x=25$
$5\overline{PA}+3\overline{PB}$
$=3(d(P,L)+\overline{PB})\geq3(d(B,L))$
$=3(25-7)=54$

8. 在坐標平面上，設直線 L_1：$2x+5y+6=0$、L_2：$4x+7y-12=0$。已知二階方陣 A 可將 L_1 變換到 L_2，亦可將 L_2 變換到 L_1，試求矩陣 $A=\begin{bmatrix}-1 & -\frac{17}{4}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$。

8
設 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

$P(x,y)\in L_1: 2x+5y+6=0$

$P'(x',y')\in L_2: 4x+7y-12=0$

$P \underset{A}{\overset{A}{\rightleftarrows}} P'$

$4(ax+by)+7(cx+dy)-12=0$
$\Rightarrow (4a+7c)x+(4b+7d)y-12=0$
$-4x-10y-12=0 \ (L_1)$

$2(ax'+by')+5(cx'+dy')+6=0$
$\Rightarrow (4a+10c)x'+(4b+10d)y'+12=0$
$-4x'-7y'+12=0$

$\Rightarrow c=0, a=-1, d=1, b=\frac{-17}{4} \Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & -\frac{17}{4}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Created with Scanner Pro

二、計算證明題（共 23 分）

1. ΔABC中，$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=6$、$\overline{CA}=7$，P為邊上或內部一點，請回答下列問題：

   (1) 求$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$的最小值，寫出此時$P$點所在的位置，並證明之。（6 分）

   (2) 求$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$的最大值，寫出此時$P$點所在的位置，並證明之。（5 分）

   (3) 若將三角形推廣到任意凸四邊形$ABCD$，請分別寫出當$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$發生最大值與最小值時，$P$點所在的位置（不需證明）。（4 分）

2. 已知 x, y, z, w 為正實數且滿足 $x+y+z+w=1$，

   試證明 $\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}+\frac{w}{1+w}\le\frac{4}{5}$。（8 分）

$\boxed{2}$

$$\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}+\frac{1}{1+w}\right)(1+x+1+y+1+z+1+w)\ge 4\times4$$

$$\Rightarrow (4-\square)\cdot 5\ge 4\times 4$$

$$\Rightarrow \square\le 4-\frac{16}{5}=\frac{4}{5}$$