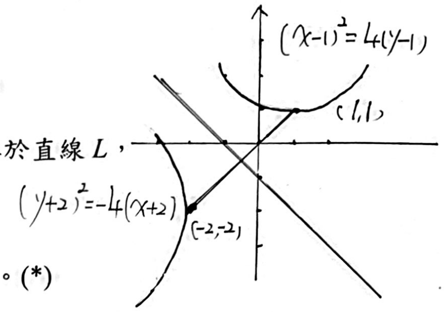
臺北市立西松高級中學 113 學年度高中部第 1 次正式教師甄選
【數學科（IB）】初試試題



一、填充題：(配分如後標有(*)：4 分；未標示：6 分。共 58 分。)

1.已知兩拋物線 $\Gamma_1: x^2-2x-4y+5=0$ 和 $\Gamma_2: y^2+4x+4y+12=0$ 對稱於直線 L，

$x+y+1=0$ (1)求對稱線 L 的方程式為________。(*)

$2\sqrt{2}$ (2)若在兩拋物線各取一點 P，Q，則 $\overline{PQ}$ 長度之最小值為________。(*)

平移 $\xrightarrow[\text{下1}]{\text{左1}}$ $x^2=4y$ 令 $P(2t,t^2)$

$x+y+3=0 \Rightarrow 2\cdot d(P,L)=\dfrac{|t^2+2t+1+2|}{\sqrt{2}}\,2 \le 2\sqrt{2}$

$x+y=-1$

过 $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

AAABBBCC　　113 桃園陽明 AAAABBBCCC

2.將{馬是小馬是小小馬}8 個字排成一列，試回答下列問題?

12 (1)三個馬相鄰，三個小完全分開有 ______種不同的排法。(*)

74 (2)同字皆不相鄰有 ______種不同的排法。

(1) BBB

$\boxed{AAA}$ CC

$3\cdot C^4_3=12$

(2) A不相鄰 − A不相鄰且 CC 相鄰 − A不相鄰且至少2个B相鄰 + A不相鄰且 CC 相鄰且至少2个B相鄰

$\frac{5!}{3!2!}\cdot C^6_3-\frac{4!}{3!}C^5_3-\left(\frac{4!}{2!}C^5_3-\frac{3!}{2!}C^4_3\right)+\left(3!C^4_3-2!C^3_3\right)$

$=200-40-120+12+22=74$

3.回答下列與數相關的問題:

2 (1)若將 $a=(2+\sqrt{5})^{20}+(2-\sqrt{5})^{20}$ 展開後，其個位數字為______。(*)

01 (2)若將 $b=(2+\sqrt{5})^{20}$ 展開後，其整數部分的末兩位數為______。

法2

令 $\alpha=(2+\sqrt{5})^4=(9+4\sqrt{5})^2=161+72\sqrt{5}$

$\beta=(2-\sqrt{5})^4=161-72\sqrt{5}$

$\Rightarrow x^2-322x+1=0$

令 $a_n=\alpha^n+\beta^n$

$\Rightarrow a_n=322a_{n-1}-a_{n-2}$

$a_1=322\equiv 22 \pmod{100}$

$a_2=322^2-2\equiv 82 \pmod{100}$

$a_3\equiv 322\times 82-22\equiv 82 \pmod{100}$

$a_4\equiv 322\times 82-82\equiv 22 \pmod{100}$

$a_5\equiv 322\times 22-82\equiv 2 \pmod{100}$

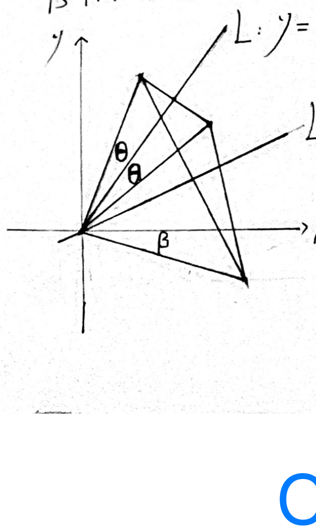
法: $(9+4\sqrt{5})^{10}+(9-4\sqrt{5})^{10}=2\left(C^{10}_0 9^{10}+C^{10}_2\cdot 9\cdot(4\sqrt{5})^2+\cdots+C^{10}_{10}(4\sqrt{5})^{10}\right)\equiv 2\cdot 9^{10}$

$9^{10}=(10-1)^{10}$　　$\Rightarrow\ \equiv 2 \pmod{100}$

$=C^{10}_0\cdot 10^{10}(-1)^0+\cdots+C^{10}_9 10^1\cdot(-1)^9+C^{10}_{10}(-1)^{10}\equiv 4500-100+1\equiv 1 \pmod{100}$

4.將座標平面上一定點 P 以圓點 O 為中心旋轉 $\dfrac{\pi}{3}$，再對直線 $y=mx$ 做鏡射。其

$m'=\dfrac{\sqrt{3}m-1}{\sqrt{3}+m}$ 結果相當於直接對直線 $y=m'x$ 做鏡射。試以 m 表示 m' 之值為________。



$L: y=mx \longrightarrow \alpha=60^\circ+\theta-\beta$

$L': y=m'x \longrightarrow 30^\circ+\theta-\beta$

$m'=\tan(\alpha-30^\circ)$

$=\dfrac{m-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+m\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}m-1}{\sqrt{3}+m}$

2024.7.30(二)

Ru

or 微分2次(計算量大) or 減2次 or 減一次 微一次

$-\frac{17}{32}$ 5.求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{3^n}=$______。

$$\frac{d}{dx}(1-x)^{-1}$$

$$S=\frac{2x}{(1-x)^3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

令 $S=2\cdot1\cdot x+3\cdot2x^2+4\cdot3x^3+5\cdot4x^4+\cdots$

$-)\ xS=\qquad 1\cdot2x^2+2\cdot3x^3+3\cdot4x^4+\cdots$

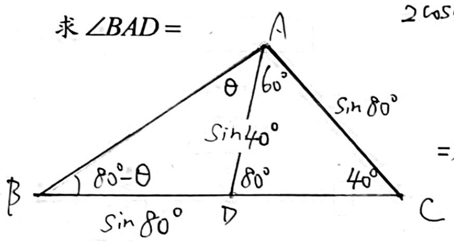
$$(1-x)S=2(x+2x^2+3x^3+\cdots)=2x\cdot\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{2x}{(1-x)^2}$$

$x=-\frac{1}{3}$

$$\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4\cdot4\cdot4}{3\cdot3\cdot3}}+\frac{-1}{4}=\frac{-17}{32}\ \#$$

$\frac{5\pi}{18}$ 6.△ABC,在$\overline{BC}$邊上取一點D使得$\overline{BD}=\overline{AC}$。若$\angle DAC=\frac{\pi}{3}$,$\angle ACD=\frac{2\pi}{9}$,求$\angle BAD=$

法:



$2\cos40°$

$$\frac{\cancel{\sin80°}}{\sin\theta}=\frac{\cancel{\sin40°}}{\sin(80°-\theta)}$$

$\Rightarrow\ \sin\theta=2\sin50°\sin(80°-\theta)$

猜 $\theta=50°$, done!

or $\sin\theta=2\cos40°\sin(80°-\theta)$

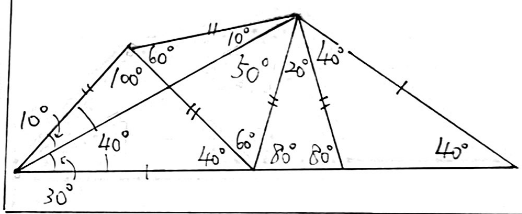
$=\sin(120°-\theta)-\sin(\theta-40°)$

$\Rightarrow\ \sin(\theta-40°)=2\cos60°\sin(60°-\theta)$

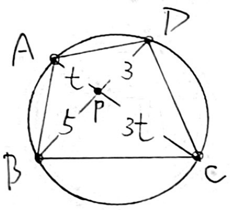
$\Rightarrow\ \theta=50°$

法2:

fierthe



$2:\sqrt{5}$ 7.圓之內接四邊形$ABCD$,若向量$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{2}\overrightarrow{AD}$,則$\sin\angle DAB$: $\sin\angle ABC=$______。



$t\cdot3t=5\cdot3\Rightarrow t=\sqrt{5}$

$\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AP}$

$$2R=\frac{8}{\sin A}=\frac{4t}{\sin B}$$

$\Rightarrow\ \sin A:\sin B=2:\sqrt{5}\ \#$

$\frac{1}{3}$ 8.求$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+2^x}dx=$______。

令 $u=-x$

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+2^x}dx=\int_{-1}^{1}\frac{u^2}{1+2^{-u}}du=\int_{-1}^{1}\frac{u^2 2^u}{1+2^u}du$$

weiye

朱氏幸福

$$\Rightarrow I+I=\int_{-1}^{1}\frac{x^2(1+2^x)}{1+2^x}dx=\frac{2}{3}\quad\Rightarrow I=\frac{1}{3}$$

---

113 西松高中

二、計算證明題:(共42分)

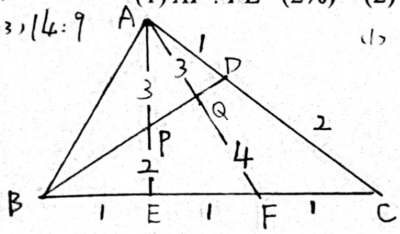
1.△ABC中,在$\overline{AC}$上取一點D使得$\overline{CD}=2\overline{AD}$,在$\overline{BC}$上取兩點$E$,$F$使得$\overline{BE}=\overline{EF}=\overline{FC}$,且連接$\overline{AE}$,$\overline{AF}$分別交$\overline{BD}$於點$P$,$Q$,則求:

(1) 3:2

(2) 21:9:5

(3) 14:9

(1) $\overline{AP}:\overline{PE}$ (2%) (2) $\overline{BP}:\overline{PQ}:\overline{QD}$ (4%) (3)△BPE:△APQ之面積比 (4%)



(1) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{\overline{PE}}{\overline{AP}}=1\Rightarrow\overline{AP}:\overline{PE}=3:2$

$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QF}}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}=1$

$\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{\overline{QD}}{\overline{BQ}}=1$

$\frac{1}{1}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{\overline{PQ}}{\overline{BP}}=1$

$\Rightarrow\overline{BP}:\overline{PQ}:\overline{QD}=7:3:\frac{10}{6}=21:9:5$

(3) $7\times2:3\times3$

$=14:9$