國立花蓮女中　113 學年度教師甄選　數學科　初試　試題卷

一、填充題（每題 5 分，共 35 分）　　　　請填寫准考證號碼後 4 碼：__________

1. 設 x、y 為實數，且 $x^2+y^2=1$，則 $(x+y)(x+3y)$ 的最大值為__________。

2. 袋中有編號 1,2,3,…,50 的球各一個，今自袋中任取 3 球，令隨機變數 X 表所取出球中號碼之最大值，則 X 之期望值 $E(X)=$__________。

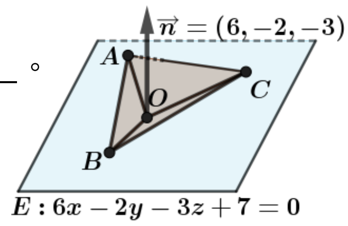
3. 設 $f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$，則 $f(x^{12})$ 除以 $f(x)$ 的餘式為__________。

4. 設函數 $f(x,y)=x^2-xy+y^2+2x-3y+5$，當數對 $(x,y)=$__________時，$f(x,y)$ 有最小值。

5. 設複數 z 為方程式 $x^4+4\sqrt{2}x^3i-12x^2-8\sqrt{2}xi-4i=0$ 之根(其中 $i=\sqrt{-1}$)，則 $\left|z+\sqrt{2}i\right|=$__________。

6. 在銳角 ΔABC 中，若 $\sin A=2\sin B\cdot\sin C$，則 $\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$ 的最小值為__________。

7. 設坐標空間中有一平面 $E:6x-2y-3z+7=0$，而 E 上有四點 O , A , B , C，與法向量 $\overrightarrow{n}=(6,-2,-3)$。而 E , O , A , B , C , $\overrightarrow{n}$ 的相對位置如示意圖，其中 ΔOAB , ΔOBC , ΔOCA 的面積分別為 14 , 7 , 42，且 $\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$, $\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2,b_3)$, $\overrightarrow{OC}=(c_1,c_2,c_3)$，則 $\begin{vmatrix}4 & a_1 & a_2\\ 5 & b_1 & b_2\\ 2 & c_1 & c_2\end{vmatrix}=$__________。



二、計算證明題（共 65 分）

1. 試證：當 $x\le 2$，$2x^3+3x^2-12x-21\le 0$ 恆成立。（9 分）

2. 設 $f(x)=(x-a)(x-2021)+1$，$g(x)=(x-b)(x-c)$，其中 a、b、c 為整數。若 $\left[f(2022)-g(2022)\right]^2+\left[f(2023)-g(2023)\right]^2=0$，試求 $f(2024)$ 之值。（9 分）

3. 試找出所有函數 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，滿足 $\forall x,y\in\mathbb{R}$，$f(x-y)=f(x)+f(y)-2xy$。（9 分）

4. 試證明 a、b 的方程式 $2^a-3^b=1$ 恰有二組非負整數解。（9 分）

5. 設 m、n 為整數，且 $m\times n\ge 0$，則滿足 $m^3+n^3+93mn=31^3$ 的序對 (m,n) 有多少組？（9 分）

6. 設 $f(1)=-1$，$f(2)=-\dfrac{1}{2}$，對所有大於等於 3 的整數 n，$f(n)$ 滿足：$n\cdot f(n)=(n-1)\cdot f(n-1)+f(n-2)$。試求 $f(n)$。（10 分）

7. 有一款手機遊戲《花女策珂戰》，遊戲中有抽卡機制，可以透過抽卡來抽得角色。每次抽卡都會抽出一張角色卡，抽卡有可能會抽到重複的角色卡。而角色卡有等級之分，最好的等級是 SSR，其餘等級都稱為廢卡。此遊戲抽卡時會有保底機制，其機制為：
若連續抽卡 99 次，皆抽到廢卡，則下一次抽卡必定抽得 SSR，而必定抽到 SSR 的這次抽卡稱為觸發保底。此機制會永久有效，即只要抽到 SSR 卡，不論是直接抽到或者觸發保底抽到，只要再次發生連續抽卡 99 次皆抽到廢卡，則下一抽也必定是抽到 SSR。
設尚未觸發保底時，每次抽卡抽到 SSR 的機率皆為定值 p，且 $0<p<1$。若抽卡 250 次，試求抽到 SSR 的次數期望值（試以 p 表示答案）。（10 分）